写 在 前 面

在数学中有不少难题，由于构思巧妙，内容精彩有趣，象颗颗珍珠闪耀着人类智慧的光彩，记载到各种数学书籍中，承前启后，世代相传，千百年来磨炼着无数数学爱好者的毅力和才华.这些难题，真是千奇百巧，琳琅满目.当人们真正进入这座数学迷宫时，就会发现才智的蓓蕾一朵朵烂熳地开放，就会使人们产生巨大的毅力和信心，就会感到充满了幸福和浓厚的乐趣，就会感到数学是时刻离不开的良师益友.因为这门科学不仅有巨大而广泛的实用价值，而且正如一些诗人和数学家说的：“在数学里面，甚至还有象诗画那样美丽的境界.”它是一门十分需要想象力和创造力的科学，对人们知识的发展、推理论证能力的培养、探求真理习惯的养成，作用极大.加里宁说：“因为数学可以使人们的思想纪律化，能教会人们去合理地思维着，无怪乎人们说数学是锻炼思想的体操.”（加里宁：《论共产主义》）在这本小册子中，读者就会看到，十九世纪的俄罗斯数学家罗巴切夫斯基在当年是如何得到“通过直线外的一点能够引出它的两条不同的平行线”的命题.这种思维既不是任何艺术的夸张所能达到的，也不是任何一个没有经过数学训练的人所能设想或接受的.然而，根据这条被称为“罗氏公理”而发展起来的《非欧几何学》却是一个已被各门科学，特别是物理学所证实了的

更符合于客观世界的事实.

在二十世纪的今天，数学已是一门领域非常广阔、内容极为丰富、系统十分庞大的学科，已是人类认识客观世界的一个重要工具，是各门科学所不可缺少的一件强有力的武器.

因此，每一个中学生，每一个青少年，都应该立志学好数学，增强克服困难的勇气，培养独立思考的习惯，提高自己分析问题和解决问题的能力. 这样才能为无产阶级革命事业、为实现四个现代化贡献力量. 但是，要学好这门重要课程，必须适当阅读一些课外读物，藉以扩大数学的知识领域，了解数学理论的来龙去脉，对于牢固地掌握课内所学的基础知识是颇有益处的.

在这个小册子中，虽然介绍了德国著名数学家高斯（1777—1855年)在学生时代，由于用尺规作出了正十七边形而立志终身从事数学研究工作，以及我国著名的青年数学家陈景润由于在中学时代听教师讲了哥德巴赫猜想而立志要摘下这颗皇冠上的明珠，但是，并非要引导广大青年都去抠这些难题. 要知道，认识是无止境的. 数学中除了这些难题外，还有大量没被认识的问题，要认识或解决某一个问题，同样需要有顽强的毅力和刻苦钻研的精神. 如果广大读者看完它，能认识到正是由于一个一个难题的研究和解决，才创造出来许许多多的数学方法，开拓出一个又一个新颖的数学分支，而受到启发和鼓舞，这才是笔者的真实用意.

在笔者成稿和多次修改的过程中，得到吉林大学数学系徐利治教授的热情鼓励和帮助. 朱梧贾、李国相、王振国、李

开城、耿洪江等同志，也在百忙中看了书稿，并提出不少宝贵的修改意见.仅向他们致以衷心的谢意.

由于笔者水平所限，资料占有不多，错误在所难免，希望读者批评指正.

张　卿

1980年5月于长春

一　漫谈尺规作图三大难题

同学们一开始学习《平面几何学》，直尺和圆规就成了亲密伙伴，利用它们就可以作出各式各样的几何图形.

如果仅仅运用直尺和圆规，根据某些已知条件，求作一个几何图形，这就叫做尺规作图问题，也叫做几何作图问题.

几何作图问题，对发展学生的智力是有益的. 在这一节里我们想通过古代尺规作图三大难题的故事，向读者介绍尺规作图的解析准则（或者称为判别法）.

古代尺规作图三大难题的故事

在上古时代，大约纪元前五世纪时，人们就提出，既然一个线段可以三等分，那么一个角能不能三等分呢？显然，所给的角要是 90° 或者是 180°，用尺规三等分是极为容易的. 所谓三分角问题：就是说任意给定一个角，作图工具仅限于直尺和圆规，问能不能将这个角三等分. 这是历史最为长久，流传最为广泛的一个几何作图问题. 两千多年来，不断有人在这个题目上花费时间. 如1936年 8 月18日《北京晨报》上曾经发表了一条消息说：郑州铁路站站长汪君，耗费了14年的精力，终于解决了三分角问题. 并将作法寄往各

国，颇引起国内外人士的注意．可是不久，就有许多人陆续地指出他的作法是错误的．1966年以前，中国科学院数学研究所每年都接到不少“解决三分角问题”的来稿，可是每稿都有错误．后来只好在《数学通报》上发表启事，让人们不要白白浪费时间去解这个不可解的几何作图题．三等分任意一个角是不可解的，这一事实早在一百四十年前，人们就清楚了．当然读者要问：为什么不可解呢？为了叙述上的方便，关于“不可能性”的证明思想，放在后面来讲．

第二个作图难题是**倍立方**问题．就是要求作一个立方体，使其体积等于已知立方体体积的两倍．关于这个问题的提出，曾经有过这样一个有趣的传说：远在纪元前四世纪的古希腊，疠疫流行，到处死人，无法解除．有人便请教当时唯心主义的哲学家柏拉图．他便许愿说：“将黛利亚神庙的立方体祭坛扩大一倍来祈求神的宽赦．这样，把神的怒气平下去，疠疫也就消灭了．”因此，人们就将祭坛的各棱延长一倍，重新建造了这个祭坛．结果疠疫照常流行．当再次请教柏拉图时，柏拉图看了新建的祭坛后说：“所造的新祭坛比原来的祭坛扩大了八倍，而不是一倍，所以不能解除疠疫的流行．”人们为了解除灾难，便千方百计地想办法，如何造出一个新的祭坛，使它的体积恰好是原来的祭坛的两倍．这样就轰动了当时希腊的数学界．所以倍立方问题又以“黛利亚神问题”相传．

传说未见得是真，但数学问题却是千真万确的．显然，从代数的观点来看，若设原立方体祭坛的棱长为 a，新立方体祭坛的棱长为 x，则倍立方问题即可表示为代数方程

$$x^3 = 2a^3$$

不妨设 $a=1$，则问题变为三次方程 $x^3=2$ 的求解问题．显然，此方程的唯一正实根为 $x=\sqrt[3]{2}$．因此，取定一个线段，把它看作“单位长”（即规定其长度为1），那么，只要我们能用直尺和圆规，作出一条线段之长为 $\sqrt[3]{2}$，那就能作出一个二倍于单位立方体来．然而，这也是不可能的．为什么又是不可能呢？还是让我们在后面统一向读者说明理由吧．

第三个尺规作图难题就是**圆化方**问题．即要求作一个正方形，使其面积等于一个已知圆的面积．设正方形的边长为 x，圆的半径为 r，则圆化方问题即可表示为代数方程

$$x^2 = \pi r^2$$

不妨设 $r=1$，则圆化方问题变为 $x^2=\pi$ 的方程是否有正实根的问题，也就是依靠直尺和圆规作出一条线段，使它的长度等于 $\sqrt{\pi}$．由此可见，圆化方的问题和 π 值的计算问题是紧密联系在一起的．圆化方的问题虽然在古希腊数学史上出现得最早，但是，却没有有意识地去寻求 π 值的计算．在我国古代，对于 π 值的研究和计算，却有着光荣而悠久的历史．伟大的数学家祖冲之（429—500年）对 π 值的研究和计算有很大的贡献，远在公元460年他就求出 π 的值是：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

当时祖冲之为了便于人们使用，还确定出用两个比较精密的分数 $\frac{22}{7}$ 作为约率，$\frac{355}{113}$ 作为密率．这是祖冲之继我国古代另一位数学家刘徽的割圆术之后，对 π 值的计算工作的重要发

展．它成为古代数学史上光辉的一页．当然，现在有了电子计算机，要算出 π值的上千万位都是轻而易举的事，可是在公元五世纪，计算工具非常落后的情况下，祖冲之能算出这样准确的结果，需要付出何等艰巨的劳动啊！德国数学家奥托于公元1573年才获得这个近似数值，比祖冲之晚了一千一百多年．也就是说外国人直到公元十六世纪，在 π值的计算上，才超过祖冲之的研究成果．由此可以看出祖冲之这一光辉成就的世界意义，也可以看到我们伟大祖国古代的数学已经发展到相当高的水平．

关于圆化方问题，早在公元前古埃及的数学家曾得到这样一个结论，即“如果正方形的边长等于圆的直径的$\frac{8}{9}$时，则它们的面积相等”．当然，在今天看来这个结论是错误的．但在远古时代能得到这样的近似值，还是令人惊奇的．这就是圆化方问题最早的研究成果．据传说，埃及人是用纯经验的方法得到这个结果的．如图 1-1，埃及人是在圆和边长等于圆的直径的正方形上铺上一层种子，再分别计算这两个图形上种子的粒数．知道正方形上种子的粒数开始时一定比圆

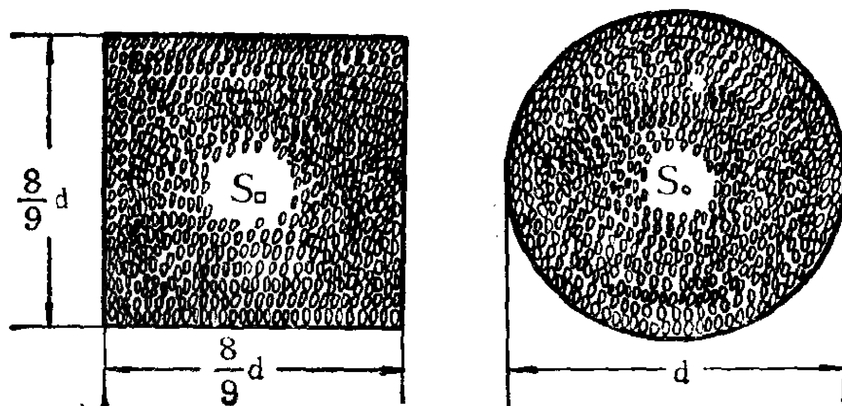


图1—1

上的多．然后逐步缩短正方形的边长，并且重复这样的试验，最后得出结论：只有当正方形边长等于圆的直径的 $\frac{8}{9}$ 时，正方形上种子的粒数才等于圆上种子的粒数．即通过这样试验的方法得到当正方形的边长等于圆的直径的 $\frac{8}{9}$ 时，该二图形的面积相等．当然，这只是个精确度很差的近似等式．讲到这里，读者还要问：圆化方问题解决没解决呢？能不能解决呢？答案还是不能解．为什么？待读者看完下面一段后，自然就明白了．

能不能解，一看就知道

从上述三个尺规作图难题的故事中，我们看到人们为了寻找这三个问题的答案，走过了多么艰难曲折的路程啊！用的时间是一千多年，花费的精力之大也是无法统计的．从而，使我们想到：能不能给出一个解析判别法，根据已知条件判别一下，能解还是不能解，一看就知道，免得我们再遇到此类问题时走弯路．当然这是不成问题的．

每一个平面几何作图题，都可以放到坐标平面上来考虑．事实上，这只要在平面上引进坐标系就可以了．

平面几何作图题总是要求人们去作出一些线段；或者去定出一些点的位置，因为点的位置都可用坐标来确定．所以归根结底，作图题无非是要求人们去作出具有某种长度的线段．当然，每两个坐标点联结起来也就确定一条线段．因此又

可以说，几何作图归根结底无非是要求定出某些坐标点.

在平面几何作图题里，总可以把一条已知线段（或给定的某一线段）当作“单位长线段”，就是说，把已知线段作为长度是1的线段.于是利用尺规作图，很容易将该线段n等分，从而求得长为$\frac{1}{n}$的线段，再将此线段m倍，又可得到长为$\frac{m}{n}$的线段.总之，一切以有理数为长度的线段都可以作出来.往下我们把点的坐标或线段长度都简称为“几何量”.

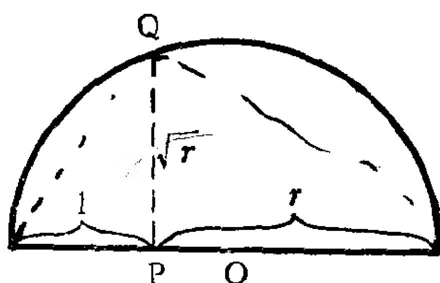


图 1—2

设r为任一正有理数，则以平方根$\sqrt{r}$为长度的线段也可以作出来.事实上，如图1—2所示，利用$1+r$为直径作半圆，从线段连接点p引垂线交圆周于Q，则$\overline{PQ}=\sqrt{r}$.由此看来，一切以正有理数的平方根为长度的线段都可用尺规作出来.

反复利用上述手续，可见以$\sqrt[4]{r}$，$\sqrt[8]{r}$，…为长度的线段也都可以作出来.一般说来，只要是由有理数经过有限多次“加、减、乘（乘方）、除、开平方”五则运算得出的数量，都可以用尺规作出以这些数量为长度的线段来.因此，这些数量就可以叫做“可作图几何量”.例如下面的数量

$$\sqrt{\left(7+\sqrt{\frac{2}{3}+\sqrt{5}}\right)\times\sqrt{\frac{3}{5}}}$$

就是一个“可作图几何量”，因为人们总可以用尺规作出以

这个数量为长度的线段来.若用a、b、c表示已知线段，K表示自然数，下面一些简单式子所表示的都是“可作图几何量”：

(1) $a+b$；(2) $a-b(a>b)$；(3) Ka；(4) $\frac{a}{K}$；

(5) $\frac{ab}{c}$；(6) $\sqrt{ab}$；(7) $\sqrt{a^2+b^2}$；(8) $\sqrt{a^2-b^2}$ $(a>b)$.

这些式子所表示的几何作图题，都是大家熟知的平面几何中的作图题.(1)、(2)是作两线段的和与差；(3)、(4)是作两线段的倍量和分量；(5)是作已知三线段的第四比例项；(6)是作两已知线段的比例中项；(7)是作直角三角形的斜边；(8)是作直角三角形的直角边.为了使读者便于理解“可作图几何量”，我们再举一个例子：

已知线段K、a，

求作线段x，使$x=\frac{\sqrt{2K^2-a^2}}{2}$

分析：因为$\frac{\sqrt{2K^2-a^2}}{2}=\sqrt{\frac{K^2}{2}-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$$令\quad y^2=\frac{K^2}{2}，即\quad y=\sqrt{\frac{K^2}{2}}=\sqrt{K\cdot\frac{K}{2}}$$

从而知道y线段是K和$\frac{K}{2}$两条线段的比例中项，所以y线段可以作出来.y线段、$\frac{a}{2}$线段作出后所求的x线段就可以作出来.

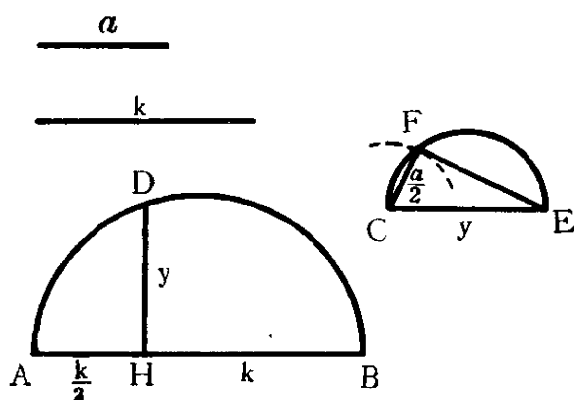


图 1—3

作法：如图 1—3 截 $AH=\frac{K}{2}$，$HB=K$，以AB为直径作半圆周，再以H为垂足作$HD\perp AB$，与半圆周交于D则$HD=y$．再以$HD=CE$为直径作半圆$\overset{\frown}{CFE}$以C点为中心，以$\frac{a}{2}$为半径画弧与半圆交于F，连接CF，EF.则FE即为所求的线段x.

我们知道，直尺和圆规的作用是：前者可以通过两个定点引直线（作线段）.后者可以用定点为中心，用定长为半径画圆周.尺规作图的基本步骤无非就是利用这样三种方式，（1）直线与直线相交，（2）直线与圆相交，（3）圆与圆相交，去确定一些点的位置（坐标点）.

所以，从解析几何的观点看，尺规作图的过程就是：从预先给定的一些可作图几何量开始，反复利用上述三种求交点的方式，去定出一些待求的坐标点位置和所需要的某种几何量（线段）.

既然作为已知条件的预先给定的几何量（线段或点的坐标）都是些可作图几何量，所以表现出来的直线方程（一次方程）与圆周方程（二次方程）的系数也都是一些可作图几何量．求交点无非是解方程组，而无论是解一次方程组或者二次方程组，只须用到五则运算（+、−、×、÷、$\sqrt{\ }$）

就够了.因此通过尺规作图过程最后所能得出的几何数量，仍然只能是一些可作图几何量.

上面的分析使我们得出尺规作图题的解析判别法：

要判断一个平面几何上的尺规作图题是否可作，只要分析一下所要确定的几何量是否为“可作图几何量”就行了.

这个尺规作图解析判别法，是1638年法国数学家笛卡儿创立了《解析几何学》后，于1837年才获得的.随后从否定方面解决了三分角问题和倍立方问题.关于圆化方问题，直到1882年德国数学家林德曼证明了π和$\sqrt{\pi}$都是超越数（即它不可能是某个整系数代数方程的根）。当然它们不属于“可作图几何量”的范围.所以圆化方问题也是尺规作图所无法解决的问题.

从这个尺规作图判别法可以看到，如果能把作图问题的代数方程列出来，能解不能解，一看就知道.例如当我们得到这个判别法后，倍立方问题和圆化方问题的“不可能性”，一看就知道了.下面我们再给出三分角问题的代数方程：

设已知角的三分之一为α，则已知角为3α.我们取它的余弦（或者正弦），根据平面三角学的三倍角公式有

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

令$2\cos 3\alpha = m$，$2\cos\alpha = x$.我们得到

$$x^3 - 3x - m = 0$$

容易看到，这就是三分角问题的代数方程.这个方程的根x，一旦能用尺规作图作出来，则$\angle\alpha$的大小就可以用尺规作出来.然而，这个代数方程对于任意给定的已知角，它的根x并不能表示成“可作图几何量”，因此三分角问题用

尺规作图解法是不能解的.

柏拉图为啥要限制作图工具呢?

古代尺规作图三大难题所以难，就难在作图工具只能用直尺和圆规上．如果作图工具不加限制，那么这三个问题都很容易解决.我们以最困难的圆化方问题为例,如图 1－4，设已知圆的半径为r，则它的面积为πr^2．我们用泥土作一个正圆柱，使其下底与已知圆等积，高为$\frac{r}{2}$，然后，把这个圆柱在平面上滚一周,在平面上就滚出一个矩形.它的长为$2\pi r$，宽为$\frac{r}{2}$.因为$\frac{r}{2}\cdot 2\pi r=\pi r^2$，所以，这个矩形的面积与圆的面积是相等的．从而，问题就变为求作一个正方形与此矩形具有相等的面积.这显然是容易办到的.

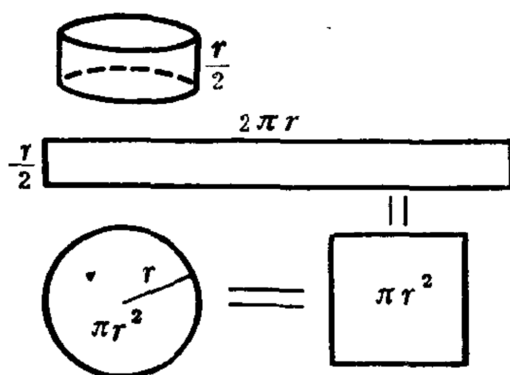


图 1－4

现在我们认为：这种限制没有必要了，作图时可以使用任何工具，只要作法正确就行．然而，如果古代希腊数学家柏拉图及其学派，不做这样限制，那么关于这三个难题的许许多多的讨论和探索也就不会发生．因而也许就不可能导致数学里许许多多新的方法、新的领域的建立．可以这样说，希腊几何学家所发明的新定理和方法，差不多都是因为要解决这三个问题而引出来的．柏拉图及其学派作这种限制的历史意义，也就在于此了.

从笛卡儿创建《解析几何学》开始，到尺规作图解析判别法的获得，我们还可以看到：一般数学方法的获得，远比解决一个具体问题重要得多.正是由于用代数方程来研究几何问题的新方法的出现，尺规作图解析判别法才能产生.这就说明，我们在研究数学问题时，不仅要一个问题一个问题地去探讨，更要注意学习和研究处理数学问题的新方法. 这也是学好数学的一条重要途径.

二　分圆问题和数学家高斯

什么叫分圆问题呢？这还是一个仅用直尺和圆规将已知圆周n等分的几何作图题．粗心的人可能会说："这有什么好研究的，在中学平面几何中，将圆周三等分、四等分、五等分、六等分，我们都作过，那是极为简单的几何作图题．"是的，这些分圆问题的特例是很简单的尺规作图题．而且，不仅如此，人们很早就能利用尺规将已知圆周2^n等分（其中$n \geqslant 2$正整数）、$3 \cdot 2^n$等分、$5 \cdot 2^n$等分（其中n是0或正整数）．并且相应地作出圆内接正2^n角形、正$3 \cdot 2^n$角形、正$5 \cdot 2^n$角形．从等于圆周六分之一的弧中，去掉等于圆周十分之一的弧，利用剩下的弧长就能作出正十五角形，即能作出内接正十五角形，于是，我们又能作出圆内接正三十角形，正六十角形，及一般形式：正$15 \cdot 2^n$角形．然而，事情并非如此简单．细心的人，马上就会想到：上述分圆问题，只不过是讨论了将圆周三、四、五、六、八、十、十二、十五…等分．仍然还是一些特例．我们不禁要问："利用尺规能将已知圆周七、十一、十三、十七…等分吗？"特别是：

当任意给定一个正整数N，是否总能利用尺规，将已知圆周N等分，并且相应地作出圆内接正N边形呢？

这个尺规作图难题，在两千多年的岁月中，不知有多少人，进行过多少次的尝试，都失败了．正当人类的智慧受到严

重考验时，1796年正在德国哥廷根大学求学的，年仅19岁的高斯（1777—1855年），轰动了当时整个的数学界．他成功地找到了仅用尺规作正十七边形的方法．五年之后，他又证明了下面这样的定理：

凡边数是$2^{2^n}+1$形状的费尔马素数的圆内接正多边形必能用尺规作图．可以把这个定理称为高斯判别法，即

圆内接正N边形可以用尺规作图的，只要将N这个数分解质因数后仅仅只含有(1)彼此互异的形状为$2^{2^n}+1$的质因数；(2) 2的正整数次幂．反之，如果N不是这样的正整数，就不能用尺规作出正N边形．

这里特别应该说明的，$2^{2^n}+1$是费尔马数，而费尔马数并非都是素数．例如$n=5$时

$$N=2^{2^5}+1=4294967297=641\times6700417.$$

同时，当$n>5$时，$2^{2^n}+1$所表示的数中，有素数，也有合数．因此，高斯的这个判别法又可以理解为：凡等分数N为$2^{2^n}+1$所表示的素数，尺规作图能解，其它的素数及其乘幂则皆不可解．根据高斯判别法，边数不超过100的正多边形中，只有24个可用尺规作图，其余74个均无解．如正3、4、5、6、8、10、12、15、16、17、20边形等都可以用尺规作出，而正7、9、11、13、14、18、19边形等却不行，因为虽然它们都为素数，但不能表示为$2^{2^n}+1$的形状，所以，都不可解．

由于理论推演上较复杂，涉及的数学知识也很多，这里仅仅介绍高斯的作图方法而不加证明. 高斯的几何作图法如下：

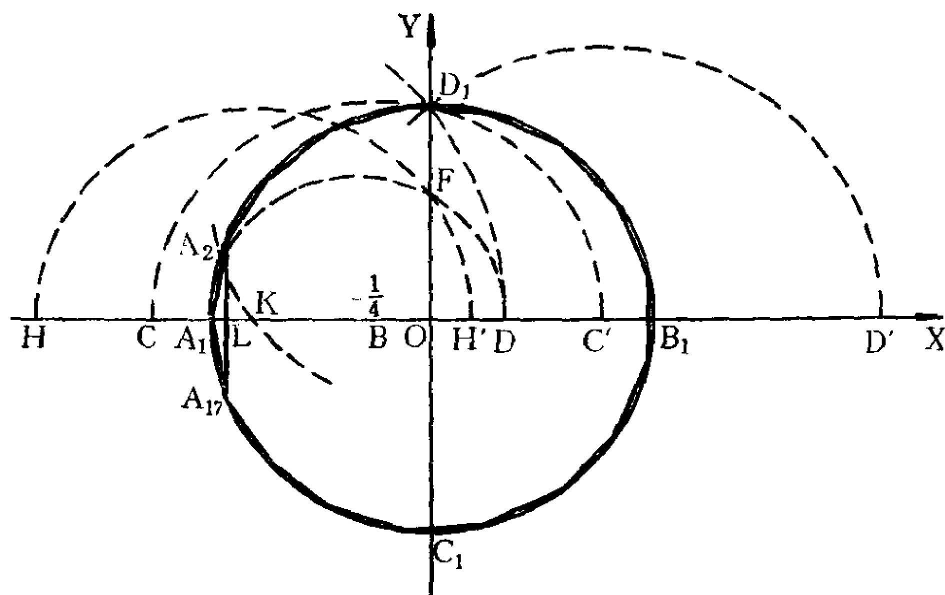


图2

（1）在单位圆O中，作互相垂直=直径A_1B_1、D_1C_1为坐标轴.

（2）作$OB=-\frac{1}{4}$.

（3）以B为圆心，BD_1为半径画弧交横轴于C和C'.

（4）分别以C'、C为圆心，以$C'D_1$、CD_1为半径画弧交横轴于D'、D.

（5）以A_1D为直径作圆交OD_1于F.

（6）以F为圆心，$\frac{1}{2}OD'$为半径画弧交横轴于K.

（7）以K为圆心，KF为半径画半圆交横轴于H、H'.

（8）过OH中点L作横轴的垂线交$\odot O$于A_2和A_{17}，则A_1A_2即正十七边形之一个边的长.

（9）以A_1A_2从A_2开始连续截取单位圆周得A_3、A_4、A_5、…A_{16}各分点，并用直尺顺次连接各分点即得正十七边形.

于是，年轻的数学家高斯，用代数的方法解决了这个几何难题，不仅第一次作出了正十七边形，更为重要的贡献是：成功地给出了正N边形作图可能性的判别方法.

1832年，德国另一位数学家力西罗，用了八十张的大纸，给出了正257边形的完善作法.后来盖尔美斯耗费了十年心血，按着高斯的方法，作出了正65537边形.他的手稿占用了整整一只大手提箱.

分圆问题是个几何作图的问题；而$2^{2^n}+1$是否表示一个素数，则是个数论方面的问题.这两者间怎么能发生联系呢？似乎是不可思议的.然而，我们越是这种感觉强烈,就越能说明当时高斯的发现是何等惊人.他不仅出色地解决了两千多年来遗留下来的一个几何作图难题，而且找出了“几何学”与“数论”这两个不同学科之间的微妙联系.这种善于在不同领域内寻找它们的共同规律的思考方法，是值得我们认真学习和大力提倡的.特别是在当今科学的发展进程中,这种倾向非常明显.它不受代数、几何、微积分、拓扑、函数论、微分方程等等分科的限制，也不受数学、物理、化学、生物等等学科的限制，而是综合运用各种理论和方法的积累去研究一些共同的规律性的问题,进而发展成边缘性的学科.如生物化学、数学物理、微分几何、结晶学….如果没有这种观察问题的能力和思考问题的方法是不行的.

从分圆问题的解决，我们可以看到高斯是一位很有才华的数学家.在高等数学中有很多定理、公式和方法是以高斯的名字命名的.他不仅对数学有很大贡献，而且对天文学、测量学、物理学的发展，都有巨大的功绩.

高斯的父亲是个石匠，家境贫寒. 在那个社会里，象他这样的家庭和所处的社会地位，要能坚持读书是很不容易的.他必须克服许多经济上的、生活上的困难.他自幼刻苦勤学，求知欲很强.据历史记载，高斯还是一个初级小学的学生时，就显现了出色的数学才能.有一次数学老师让全班学生计算

$$1+2+3+4+\cdots+100$$

的和等于多少？当别的学生还没想到如何去算的时候，高斯很快就准确地找到了答案：它们的和是5050.感到十分惊奇的老师问他："你怎么计算的这样快呢？"高斯从容地回答：我考虑到

$$1+2+3+\cdots+100$$

与

$$100+99+98+\cdots+2+1$$

相应的每两项之和都等于101，因此，两个式子相加恰好是100个101，再取其和的一半，恰好是5050. 老师非常满意地给高斯的回答作了很高的评价.

高斯在学校读书时，数学和语言学都学得很出色.正当他在选择职业，考虑自己的一生，究竟要在哪个领域里贡献力量而犹豫不决时，正十七边形作法的发现，给他以很大的鼓舞，使他立即决定，终身从事数学研究工作.后来高斯果然成

为世界上杰出的大数学家.

从高斯成长的道路，不难看出，勤奋学习，刻苦钻研，特别是青少年时代打好基础是非常重要的.

据材料上记载，高斯在年迈病危的时候，告诉别人说："我死后什么东西都不想要，只希望在我的墓前做一个正十七边形." 1855年高斯逝世了.人们在哥廷根城给他竖了一个纪念碑，碑座便是一个正十七棱柱，以纪念这位数学大师在青少年时代最重要的数学发现.

三　最短距离问题趣谈

十九世纪德国柏林大学数学教授斯泰纳（1796—1863年），根据生产实践的需要，研究了一个虽然简单，但实用价值很大的问题，即

在三个村庄间，建立一座供水站．为了用水人的方便和节省水管，问怎样选择供水站的地点，才能使供水站到各村庄的距离的总长为最短．

换成数学语言就是：

设A、B、C是平面内不在同一直线上的三点，求在$\triangle ABC$中找一点P使

$$PA+PB+PC$$

为最短（图3—1）．

这个问题还可以推广为：

在A、B、C三个村庄间建立一座供水站，已知修往A庄的单位造价是m元/米，修往B庄的单位造价是n元/米，修往C庄的单位造价是r元/米，问供水站建立在何处，才能使总造价最省．

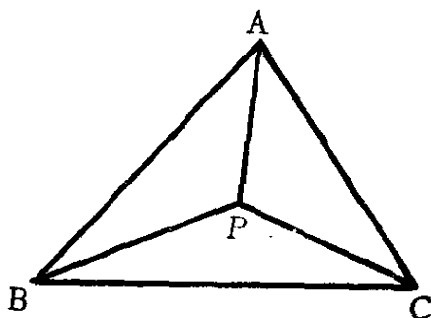


图3—1

也就是在$\triangle ABC$中，求使

$$m\overline{AP}+n\overline{BP}+r\overline{CP}$$

取极小值的P点的位置.

或者把这个问题变化为:

设三个村庄,每个村庄各有上学孩子为40人、50人、60人,要在三个村庄间建立一座学校,使所有孩子耗费在走路的时间总数为最少,即设学校到三个村庄之距离分别为S_1、S_2、S_3,求使

$$40S_1+50S_2+60S_3$$

取极小值的学校的位置.

尽管上述三个问题提法不同,但都是同一个数学问题,即

在$\triangle ABC$内找一点P,使

$$m\,\overline{AP}+n\,\overline{BP}+r\,\overline{CP}$$

取极小值.其中m、n、r为已知常数(第一个问题是后面两个问题的特例$m=n=r=1$).

因为这个问题是斯泰纳首先提出的,所以叫做斯泰纳问题,通常也叫做最短距离问题.这个问题提出后不久,就被解决了,并且得到了广泛的应用.

下面给出两种非常有趣的解法.

只要把包含这三个村庄的地图放在一张桌子(或者架起的纸板)上,再在相当于各个村庄的A、B、C三处在桌子上打三个洞,通过这些洞垂下三条绳子,每条绳子一端分别系上重40克、50克、60克砝码,这三条绳子另一端结在一起,我们所要求的点P(或者学校、供水站)就应该在绳结所停留的地方(图3—2).

这个实验解法十分容易做到,但是,它的道理是什么

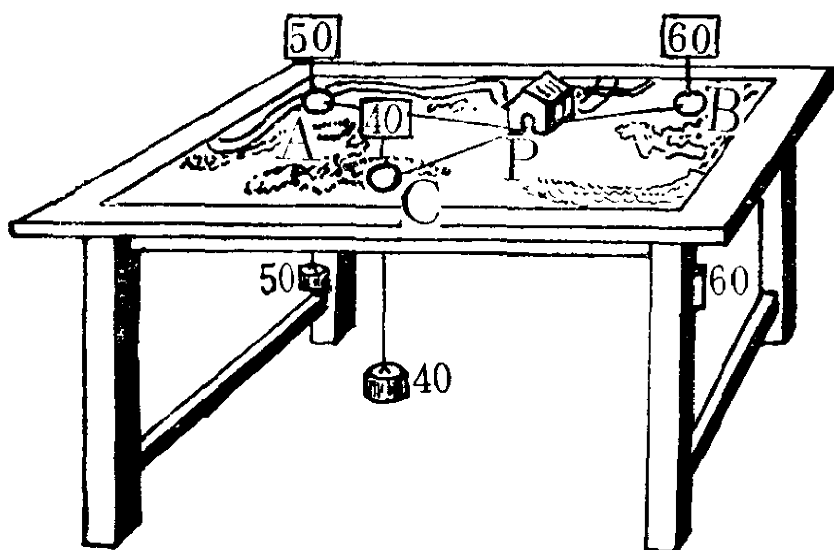


图3—2

呢？这倒是值得我们仔细研究的.

由物理学可知，若三条绳子上都系40克重的砝码，则绳结一定要在$\triangle ABC$三条中线交点处（三角形的重心）停留. 即当$m=n=r$时，P点是在$\triangle ABC$的重心处. 若有两条绳子上不系砝码，只有一条（例如A点处）系上120克砝码，则绳结一定停留在A点处. 若三条绳子上系着不同重的砝码，就相当于质量不均匀分布的三角形物体，求该物体的重心位置.

我们把这个三角形物体看成是受三个力（显然是平行力）P_1、P_2、P_3的作用，可见求重心就转化为求三个平行力合力的问题. 因为，这个合力，即物体的重力，并且无论物体处在什么位置上，其重力总是通过一个确定的点，此点即重力的作用点，也就是物体的重心.

由实验的解法容易找到这个点的位置. 要用定量的办法确定这个点的位置又如何求呢？当引入A、B、C三点的坐标为$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，再根据平面内任一力系平衡的充分必要条件是：所有各力对平面内任意一点力矩的代数和等于零，立即可得下面重心的坐标公式

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{3}P_ix_i}{\sum_{i=1}^{3}P_i}\qquad y=\frac{\sum_{i=1}^{3}P_iy_i}{\sum_{i=1}^{3}P_i}.$$

下面再给出这个问题的第二种解法.

如果力系各力的作用线均在同一平面内，并且各力的作用线汇交于一点，这样的力系叫做平面汇交力系.

设物体受到两个共点力P_1和P_2的作用，它们的合力可由平行四边形法则来确定（图3—3）. 两个相交力的合力，也可用这样的方法来确定：如图3—4所示，先作力P_1，在P_1的末端作力P_2，然后连接P_1的始端与P_2的末端所得的矢量R，即为它们的合力. 这种求合力的作图法，叫做力三角形法则.图3.4所得的三角形也叫做力三角形. 若物体受多个共点力的作用，求这多个力的合力可以连续应用三角形法则，将各已知力首尾相接，连成折线（图3—5），最后连接折线的首末两点，便得合力. 这种求

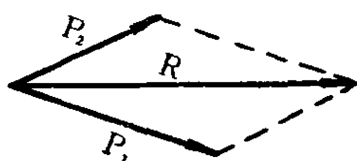


图3—3

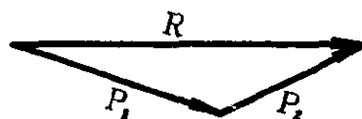
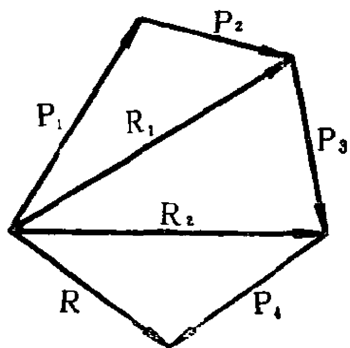


图3—4



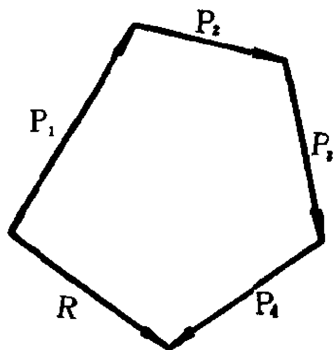


图3—5

合力的作图法叫做力多边形法则，所得的多边形也叫做力多边形.

根据平面汇交力系平衡的充分必要条件，力系各力组成的力多边形自行闭合. 若把三角形看成一个物体受到三个大小和方向都不同的力的作用，并且，使其平衡，则所得到的是一个闭合的力三角形. 它的三条边就和这三个力的大小和方向相当.

如图3—6作一个力三角形，使其各边长分别为40，50，60个单位. 设顶点A、B、C的三个外角分别为α、β、γ. 所求的点P与三个顶点的连线，这些直线所夹的角，即$\angle CPB$，$\angle APB$，$\angle APC$正好等于图3—6中A、B、C的三个外角，即

$\angle APC=\angle\alpha$，$\angle APB=\angle\beta$，$\angle BPC=\angle\gamma$.

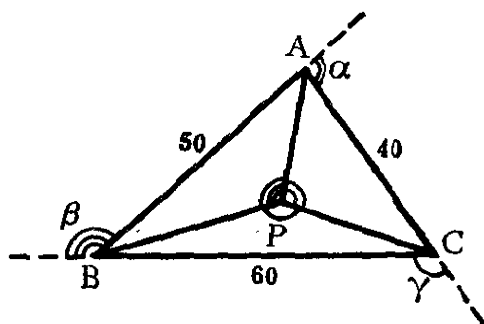


图3—6

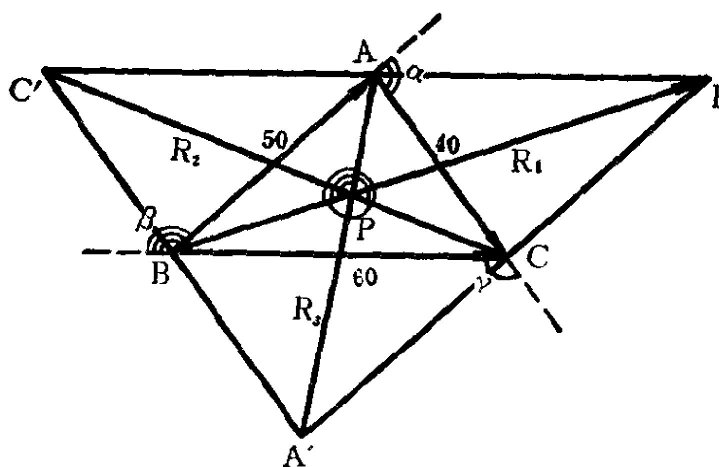


图3—7

为什么P点即为所求之点？P点的位置又是用怎样的作图方法确定呢？通过下面给出的两个几何作图方法以及读者非常熟悉的平面几何知识，不难给出它的

证明.

作法 1：如图3—7在力三角形ABC中，首先作P_1P_2的合力$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{R_1}$，再作$P_3P_2$的合力$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{R_2}$，最后作$P_1P_3$的合力$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{R_3}$.则三个合力$\overrightarrow{R_1}\overrightarrow{R_2}\overrightarrow{R_3}$相交于$P$点，$P$点即为所求.

容易看到$\triangle ABC$的三边$AB \perp\!\!\!= \frac{1}{2}A'B'$，$AC \perp\!\!\!= \frac{1}{2}A'C'$，$BC \perp\!\!\!= B'C'$.而$P$点恰好是$\triangle A'B'C'$的三条中线的交点.

这个解法使人发生兴趣的是：从力学角度来理解，P点是三个合力的汇交点，要使这个力系平衡，三个合力的合力必等于零.要从几何作图来理解，它恰好是$\triangle A'B'C'$三条中线的交点，并且，不难证明

$\angle APC=\angle\alpha$，$\angle APB=\angle\beta$，$\angle BPC=\angle\gamma$.

作法 2：由于$\triangle ABC$的三个外角α、β、γ是已知的，并且AC、AB、BC的长也一定．所以，在$\triangle ABC$中以AC为弦；作一个含有α度的弓形弧；再以AB为弦，作一个含有β度的弓形弧，与前弧相交于P点，则P点即为所求。因为α、β、γ三个外角之和为360度，各含α度，β度两个弓形弧之交点P与A、C、B连线，$\angle APC=\alpha°$；$\angle APB=\beta°$．由于周角也是360°，所以$\angle BPC$一定是γ度（如图 3 — 8 所示）．

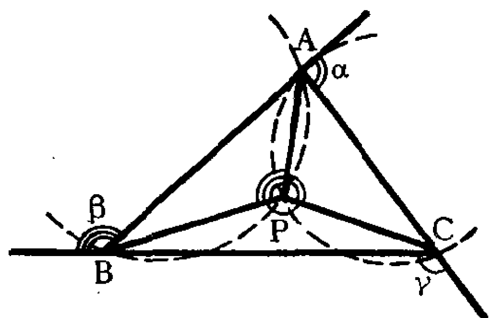


图 3 — 8

上述两种解法都是初等方法，当读者学了微积分后，用微积分中求异数的方法来求这种极值问题，是非常简单的.

从斯泰纳问题的解决，可以看到数学和力学的亲密关

系．力学包括有静力学、动力学、流体力学、弹性力学、材料力学和理论力学等分支．无论是哪一个分支都是以数学为重要的工具．有了雄厚的数学基础，再去研究力学则容易入门．

力学作为一门科学是在古希腊时代出现的．古代伟大的思想家和学者亚里斯多德，在他的著作《物理学》、《力学》和《天与世界》中，第一次阐明了运动和力的关系，并引进了“力学”这个概念．著名的几何学家和力学家阿基米德（公元前287—212年），在他的两本著作中给出了力学真正的科学含意，奠定了几何静力学和重心静力学的理论基础．这两本著作的特征是：推理的严格性和方法的细致．可见力学一脱胎就带着浓厚的数学味道．

十八世纪和十九世纪初叶，被人们称为数学发展的“黄金时代”．由于强有力的数学工具——微积分的应用，力学的方法、理论迅速地完善起来，使力学和数学一齐向前发展．在“数学的黄金时代，这些科学之间的区分和界线几乎是不存在的”．首先是伟大的数学家，微积分学的创始人之一牛顿创立了经典力学，提出著名的牛顿三定律，使一部有严密的逻辑结构，完美的科学体系的力学，呈现在人们的面前．数学家拉格朗日说：“这是人类智慧最伟大的产物”．从牛顿时期开始，力学变成了一门精确的数学科学．

力学是以数学为工具的，然而，在力学的研究中，又产生了不少新的数学理论．如雅可比和贝努利弟兄在解析地研究受重力的质点在各种不同的曲线上运动时，创立了变分法．

后来，许多数学家又开创出不少力学新分支．象欧拉建立了“分析力学”的理论；法国几何学家普安素（1777—1859年）创立了“几何静力学”；以及现代的“电动力学”，“量子力学”等新的领域．无论是力学的哪一个分支或领域，都离不开数学．离开了数学，力学也将断送了前途．

力学在科学技术上的重要地位以及应用的广泛性是众所周知的．这里强调了力学和数学的关系，无疑是想说明：为了学好力学，也必须学好数学．

四　关于“第五公设”的一场激烈争论

在数学发展史的长河中，关于“第五公设”问题，有过一场激烈的争论．所谓“第五公设”就是欧几里德在“几何原本”的“公设”一节里列出的第五条．用现在的叙述形式，就是目前中学平面几何中的平行公理，即“过直线外一点，只能引一条直线与已知直线平行”．后来许多人对这一公设的必要性发生怀疑，看法不同，争论不休，最后导致俄罗斯数学家罗巴切夫斯基得到所谓“罗氏公设”，即“过直线外一点可以引无数条直线与已知直线平行”．并且，由此创立了“想象几何学”．德国数学家黎曼给出了所谓“黎曼公设”，即“过直线外一点，和已知直线相平行的直线，一条也引不出来”．并由此创立了“黎曼几何学”．参与争论、研究这个“第五公设”的大有人在．这场争论持续的时间长，得到的研究成果也大，在数学的历史上留下了生动的一页．要想了解这场争论，还得从头说起．

几何观念的产生，可以追溯到非常古老的时代．远在四千多年以前，无论是西方的古埃及和巴比伦，还是东方的中国和印度，都已经产生了某些粗糙的和单凭经验的几何观念．相传是由于划分土地和土地测量等生产实践的需要而产生了“几何学”．当时研究几何之风甚盛，哲学家和数学家

柏拉图在他所设的学院门口挂着这样一块牌子："不懂几何的人，请勿入内．"可见当时人们是何等重视"几何学"的学习．"几何学"这个名词的原意就是"测地学"．当"几何学"逐渐走向逻辑推理的道路之后，不仅为从事数学和技术的人们所应用和研究，而且也成为哲学家们讨论的对象．

欧几里德的功绩

欧几里德大约生活在公元前330年到275年之间，他是古代最伟大的数学家之一．据传说，马其顿人侵入埃及后，在尼罗河口上建筑了"亚历山得里亚城"和"亚历山得里亚大学"．这所古老的大学在早期出了三个最伟大的数学家，其中之一就是欧几里德．另外两位便是阿基米德和亚波罗纽斯．

在欧几里德时代，希腊人已经具有较深的几何知识，关于定理证明的概念形成了．许多希腊学者已经尝试着按逻辑相关的次序去著书立说．欧几里德最惊人的贡献，就是他系统地整理了前人的发明创造，出版了他的巨著《几何原本》．全书共十三章，在这个关于初等几何的丰富的科学论著里，欧几里德力求从少数的命题出发，来构成几何学的严格的逻辑体系．不难想象，把许多几何知识统一起来，搜索不同定理的证明，特别是把它们排成逻辑的链子，是一项重要而且十分困难的工作，没有高度的技巧是完不成这一重要任务的．

我们中学几何课本里，尽管是现代化的叙述方法，就其内容而言，依然没有超出《几何原本》的范围．相继数千年，《几何原本》仍不减它的光辉，可见欧几里德功绩之大．

还应当指出：欧几里德的几何学在十八世纪末及十九世纪初，获得了重要的发展，成为天文学、力学、物理学、电工学、光学，特别是飞机的机翼及螺旋桨原理等许多科学技术的基础.

历代著名的科学家如哥白尼、伽里略、笛卡儿、牛顿、罗蒙诺索夫、拉格朗日、罗拔切夫斯基、奥斯特洛格拉德斯基等等，都学过欧几里德的《几何原本》.

欧几里德《几何原本》之所以得到极高的评价，正是由于他提出了在几何证明过程中，不能无止无休的追根问底，追来问去总要追到某些原始的、不加证明而被承认的命题.在数学理论中，那些不加证明而被直接承认的命题叫做公理.如“过直线外一点能引且只能引一条直线与已知直线平行”，就叫做平行公理.

公理虽然不加证明而被承认，但是，它的真实性的确不必怀疑.因为，任何命题要称之为公理，必须是经过人们千百万次实践验证无误，真实地描写了现实世界的数量关系或空间形式的基本性质.

根据这一点可见，固然不能无论什么样的命题都叫做公理，同时，也必须有足够数量的公理.如在现在已严格整理了的希尔伯特（1802年—1943年）几何公理系统中（后面还将详细介绍），若去掉了任何一条，就会使一系列的命题失去依据.也就是说，若公理不完备，则几何学的内容或者是不完备，或者是在逻辑论证上要有缺陷.那么，怎样才算恰到好处呢？一般来说，公理应该具备以下几个条件：

1. 公理的显而易见性.这一条件只作为一个一般的要

求.因为一个公理是否显而易见，很难定出一个明确的标准来.

2. 公理的无矛盾性.

3. 公理的最少个数.

4. 公理的完备性.

在公理的选择上，并不是所有的人都一致，他们可以各自选择不仅在文字上有所不同，甚至在内容上也可以完全不同的公理.但是所推导出来的几何命题都是大致相同的.那么，为什么从不同的公理出发能导出相同的几何命题呢？原来人们所选择的公理，尽管在内容上不同，但在作为论证几何命题的根据来说，都是等价的.

所谓等价，就是例如有甲、乙两命题，我们若把甲命题看成是公理，则由甲可以推出乙命题；反过来，我们若把乙命题看成公理，则又可以由乙推出甲命题. 结果，这两个命题中的任何一个成立，就会导致两个命题都成立。因此，我们把甲、乙两命题说成是“等价”的.

为了讲清从欧几里德第五公设开始的这场争论，我们把欧几里德几何原本中的公设和公理引述如下（公理和公设的实际意义是相同的，由于原本中是分两部分列出来的，这里也分两部分抄录）：

公　设

要求下面一些事项：

1. 从每一点到另一点可引直线.

2. 有限的直线可以无限延长.

3. 从任何中心可用任何半径画圆周

4. 所有的直角都是相等的.

5. 若两直线和第三直线相交且在同一侧所构成的两个同侧内角之和小于两直角，则把这两直线向这一侧适当地延长之后一定相交.

公　理

1. 各与同一第三个相等的两个也一定相等(即都与第三个量相等的两个量一定相等).

2. 若相等的加上相等的,那么整个也相等（即等量加等量其和相等）.

3. 若从相等的减去相等的,那么所获得的差也相等（即等量减等量其差相等）.

4. 互相重合的一定相等.

5. 整个大于部分（即全部大于部分）.

当然，欧几里德几何原本中还有“定义”，因为只有公理或公设以及定义,才能组成几何学上逻辑论证的依据.由于与我们要讨论的问题关系不大,所以不再引述.

争论的起点

前面概述了欧几里德的业绩，但是，这并不等于说《几何原本》完美无缺.事实上,经过长时期的推敲,《几何原本》也有不少缺点.

首先，欧几里德所给出的许多定义，完全不是在逻辑的

意义下的定义，而只是对几何形象的一目了然的描写.所以，后面对命题进行逻辑证明时，用处不大.例如“线是有长度而没有宽度的”等等.从这样的定义中，不可能带来任何逻辑严密的推论.

其次，有些公理和命题是多余的.如“所有直角都是相等的”.

在十九世纪时，人们又指出了《几何原本》缺“位置公理”、“连续公理”和“移形公理”.没有这些公理，几何问题的逻辑证明就不可能是严密的.如没有位置公理，则“在…中间”、“在…内部”、“在…外部”等就无法区别；没有连续公理，在平面内两条不平行的直线，保证不了一定相交；没有移形公理，在图形移动时，也保证不了线段能不能弯曲、角度大小会不会改变等等.

关于这些问题正如罗巴切夫斯基写道：“欧几里德《几何原本》，这样一来，不管它的年代多么久远，不管在数学中我们的全部光辉成果如何，直到现在都保存了它的原始缺点.”

位置公理、连续公理和移形公理，人们在研究的过程中都一一地补上了.

应该特别说明一点，只是由于科学事业的日趋发展，人们才不断地发觉《几何原本》的不足.任何事物一出世，就要求它十全十美，是不可能的.两千多年前的欧几里德，能够给出这样比较完整的几何系统，应该认为是奇迹了.因此，尽管《几何原本》存在着上面所述的一些问题，它的伟大意义并不因此而有所削减.

人们并不责怪欧几里德《几何原本》的不完备性，但是对“第五公设”却提出了许多不同的见解．因为，它和其余的公理或公设比较起来，尽管也很符合我们的日常经验，它的真实性也是众所公认的，但就是不如其他公理或公设给人一种显而易见的感觉．在同一平面内二条平行的直线永不相交的性质，确实不能在平面的有限部分内直观地看出来，而必需包含着超越直观范围的想象在内．

奇怪的是，在破绽很多的公理系统中，历史上不少数学家并没有因此而走上欧几里德证法的逻辑改善的正路，偏在通过修正“第五公设”上下了功夫，要把这一公设变成定理，企图从前面的定义、公理出发，给予严格的证明，即希望把这个第五公设变成定理．原来人们并没有怀疑这一公理所叙述的事实，然而，当人们进行激烈争论之后，特别是在反复试证中，总是发觉其中有缺点，到后来，“第五公设”所叙述的事实也受到怀疑．

到底能不能利用前面的定义和公理，把第五公设证明出来呢？即能不能变第五公设为定理呢？在几何历史中占着极重要的位置．世界许多著名数学家都被吸引到这一争论中了．直到十八世纪末，这个关于第五公设的问题，都是最为流行的难题之一，一直没有得到解决．我们甚至有理由猜测：欧几里德本人也很可能尝试过“第五公设”的证明．因为，《几何原本》中的“第五公设”，直到在第二十九个命题的证明中，迫切要用的时候才出现，而且，在这以后，其余各命题始终没有再用．可见，欧几里德本人对这个公设也感到不满意，而不去反复用它．

在"第五公设"问题的研究日趋明朗，逐步完善的情况下，德国数学家希尔伯特将几何学中的全部定义和公理，进行了最严格的数学处理．发表在他的一本著作《几何基础》中．这本书在1899年出版，1903年获得了以罗巴切夫斯基的名字命名的国际奖金．奖励他在这本书里不但提出了完备的几何公里系统，而且还给出证明一个公理对于别的公理的独立性和证明已知公理系统确实完备的普遍原则．奖励他由于这部书的发表而使"几何学"的研究和发展，开创了一个新纪元．

在这部书中，他把全部公理整理成五组公理群，即

Ⅰ组，关联公理：包括八个公理．

Ⅱ组，顺序公理：包括四个公理．

Ⅲ组，合同公理：包括五个公理．

Ⅳ组，连续公理：包括四个公理．

Ⅴ组，平行公理：包括一个公理．

一个崭新的几何世界

第五公设到底能不能变为定理给以证明，其说不一．有人说能，并为此而奋斗一生，反复证明这个第五公设；有的人毫无收获便抛弃了这个研究方向；有的人也得出一些有价值的命题，但是没有达到变第五公设为定理的最终目的；也有的声称自己证明了第五公设，但后人终于还是找出其证明的错误．

二千多年来，所有称得起为数学家的人，都尝试了这一工作，他们都花费了巨大的劳动，总希望能由其它更明显的

命题，把这个第五公设证明出来，有时好象已经胜利在望，可是最后不是自己，就是别人指出在证明里犯了逻辑上的错误.

这种逻辑上的错误，都是由于虽然没有直接用第五公设，可是证来证去，总是用了各种各样与第五公设“等价”的命题. 而这些等价命题需要证明，正如第五公设需要证明一样.

为了读者便于理解，我们列出一些既简单又浅显的与第五公设等价的命题. 也就是说从第五公设（用欧几里德的叙述）出发，可以证明下面任何一个定理；反之，把下面任意一条作为公理，都可以将其它几条包括第五公设在内，推证出来.

1. 过已知直线外一点，只能作一条直线与已知直线平行.（第五公设的现代叙述）

2. 两条平行线被第三条线所截，则内错角相等.

3. 三角形的外角等于其不相邻的两内角的和.

4. 三角形内角和为两个直角.

5. n边形内角和为 $(2n-4)d$. 其中$n\geqslant 3$的自然数，d表示90°.

十八世纪意大利数学家萨凯里（1667—1733年），企图不用第五公设而证明四边形的内角和等于四个直角. 假若他证明成功了，回过头来就可以证明第五公设了. 他引出了一系列新的命题，然而，证来证去，还是用了一个与第五公设等价的命题，即“有限图形的性质，可以扩大到无限图形的范围中去”，而宣告失败. 后来，他甚至绝望地说：“第

五公设是不可打破的．”他虽然没有攻破第五公设，但是却成了建立非欧几何学的先驱者．他所引出的一系列的命题，都进入了罗巴切夫斯基的无矛盾的非欧几何学中了．

十八世纪瑞士数学家伦培脱（1728—1777年），在自己的著作“平行线理论”中所研究的内容和萨凯里想到的问题极为相似，也是以失败而告终了．

后来，德国数学家勒让德（1752—1833年）也是想不用第五公设来证明“任意三角形内角和等于两个直角”．他一共引出了五个很有价值的命题．这五个命题在任何一本关于非欧几何的书上都可以找到．如：

1．若每个三角形的内角和等于两直角，则第五公设可以证出．

2．在每个三角形里，内角和不会超过两直角．

3．若至少有一个三角形的内角和等于两直角，则每个三角形的内角和都等于两直角．

4．若存在这样的锐角，在它的一边的任意点上引垂线，总与另一边相交，则第五公设可以证出．

5．四边形内角和为四直角与三角形内角和为二直角是等价的．

勒让德不仅给出如上五个命题，而且始终认为自己已经解决了第五公设的证明问题．然而，后来人们终于找到了他还是不自觉地利用了一个与第五公设等价的命题，这样他的所谓第五公设已被证明的结论也被推翻了．

在十九世纪初，俄国的数学家罗巴切夫斯基，匈牙利的数学家鲍里埃（1802—1860年）和德国的数学家高斯，在前人

研究的基础上，不约而同地提出了一个全新的几何学观点，跳出了人们习惯的欧几里德几何的圈子，开创了一个新的几何世界．

这种跳跃，花费了两千多年的时间，冲破了千百万人的习惯势力，是多么不容易啊！

我们知道高斯，当时，由于他的数学成就之大而有世界声望，被称为“数学王子”，成了全球数学界的最高权威．然而，当他得到第五公设不能证明的结论后，怕被别人嘲笑，用他的话说：“怕引起某些人的喊声”，而不敢公开发表．只是在1824年给友人的信上写道：“三角形内角和小于两直角，这个假定引导到特殊的与我们的几何完全不同的几何，这几何是完全一贯的，并且我发展它本身，结果完全令人满意．”高斯尽管很早就有了非欧几何的轮廓，由于他怕这种新思想不会被人理解，更怕当时凶残的教廷势力，所以不仅他一辈子没有勇气发表自己的关于第五公设的论著，甚至也不支持别人搞这方面的工作．高斯大学时代的同学匈牙利的数学家鲍里埃终生从事于第五公设的证明．他的工作没有什么大的成就．但是，他的儿子约翰·鲍里埃却获得了出色的战果．约翰在1817年—1822年在维也纳工学院读书时就醉心于第五公设的证明，并且到了1823年时，他已信心百倍地认识到：有可能创立新的几何学．虽然，当他的父亲知道他也在搞第五公设的证明而给他写信说：“希望你放弃这个问题．对这样一个问题的害怕应该更多于感情上的迷恋，它会剥夺你生活中的一切时间、健康、休息和一切幸福．”这丝毫没有影响约翰为开拓新路而继续工作．当父亲把约翰研

究的成果寄给高斯征求意见时，高斯的回信却使约翰大失所望. 信中说："如果我一开始便说我不能称赞约翰的工作，那一定会感到奇怪. 但是我确实不能说别的话，因为称赞他等于称赞我自己. 你的儿子所采用的方法和他所达到的结果几乎全部和我自己在三十年前已开始的个人沉思相符合. 我自己的著作，虽然写好的仅是一小部分，我本来永远不愿发表；现在有了老友的儿子能够把它写下来，免得它与我一同淹没，那是使我最高兴没有了."高斯这样不支持约翰的工作而犯了一个大错误. 约翰由于没有人理解、同情和给与精神上的支援而陷于失望，甚而误认别人争优先权而放弃了一切数学研究.

十九世纪二十年代俄罗斯伟大的数学家，喀山大学数学教授尼可拉·伊凡诺维奇·罗巴切夫斯基（1793—1856年）比高斯勇敢，比鲍里埃顽强. 他不怕别人讥笑，终于在他的第一部著作里，就把非欧几何发展得非常广阔，非常深刻. 正如希尔伯特教诲的那样，第五公设问题的解决，同样地是伴随着一片全新的数学园地的开辟，那就是以罗巴切夫斯基名字命名的另外一种新的几何学——"罗巴切夫斯基几何学". 这个新的几何系统保留了欧几里德几何公理中的前四组，取消欧氏的第五公设，再添上一个所谓"罗氏公设"，即

V组，罗氏公设：在平面上通过一直线外的一点，至少可以作这条直线的两条平行线.

《罗巴切夫斯基几何学》就是以上述五组公理为基础，推导出大量的新命题而构成了与欧几里德几何完全不一样的新的几何世界.

我们不想在这里详述罗氏几何的具体内容，为了让读者知道它比欧氏几何新在何处，只列出罗氏几何中的几个概念和定理. 有兴趣的读者可以查阅有关书籍.

关于平行线的定义：如图 4 — 1 若

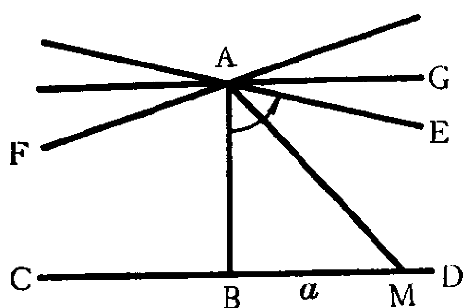


图 4 — 1

(1) 直线AE不与直线a相交；

(2) 凡在角BAE内部的所有射线AM必与射线BD相交. 满足上述两个条件的直线AE，叫做直线a在C到D方向下的平行线. 满足条件的直线AF叫做直线a在D到C方向下的平行线.

为了读者跳出欧几里德几何的圈子，对这个定义简单说明如下：

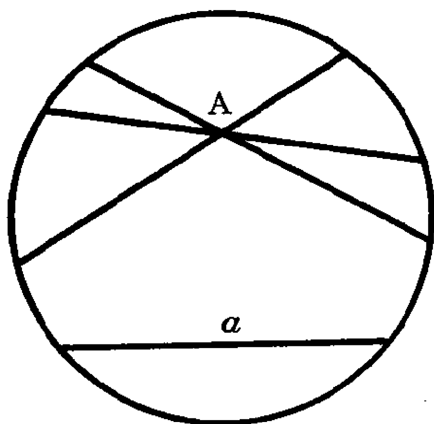


图 4 —2

如图 4 — 2，我们设想圆内一条弦 a 及圆内不在 a 上的一点 A，过A 所作不与a在圆内相交的直线显然是无穷多条. 假设把圆的直径不断增大，上面的叙述显然还是成立. 因此，当我们把圆的直径不断增大，过A的无穷多条直线和直线a可以在任意有限大的平面内不相交. 至于假设平面是无限大呢？这已经超过了直觉的范围，归根到底是一个逻辑性的问题. 在这种意义下对“罗氏几何”中平行线的定义就易于理解了.

定理1：三角形的内角和小于两个直角，而且不同的三角形有不同的内角和.

定理2：任何凸四边形的内角和小于四个直角. 因此矩形不存在.

定理3：不存在相似三角形.

定理4：如果一个三角形的三个角对应等于另一个三角形的三个角，那末这两个三角形全等.

仅举以上几例，就别开生面. 确实和我们习惯的欧氏几何走的是两条道路.

新路的开拓者付出了艰巨的劳动，使几何学发生了重大的变革. 罗巴切夫斯基出生在一个穷苦人的家里，三岁时父亲就去世了. 有毅力、有远见的母亲，克服了许多困难送他读完中学，又支持他考入了新建立的“喀山大学”. 在学生时代，罗巴切夫斯基的数学才能就初露锋芒，1810年获得了硕士学位，四年后得到了副教授的称号，1816年又晋升为教授. 1827年他被选为喀山大学的校长. 高斯非常重视罗巴切夫斯基的几何思想. 为了阅读他的原著，高斯还专门学习了俄语，并且亲自介绍罗巴切夫斯基参加“哥廷根科学协会”，推荐为通讯院士

和高斯不同的是罗巴切夫斯基不怕别人不理解，不怕别人讥笑，勇敢的坚持自己的几何思想，一篇接着一篇地发表自己的研究报告。当他的几何观点宣布以后，教会的主教宣布他的学说是邪说. 还有人用匿名的方法在反动的杂志上谩骂他，甚至宣布他为疯人，但他还是坚持自己的思想，继续发表自己的著作，为捍卫新的观点进行顽强的斗争. 直到晚

年双目完全失明，他还用口授的办法，留下了最后的著作《泛几何学》。一位英国数学家感动地说罗巴切夫斯基是“几何学的哥白尼”.

罗巴切夫斯基的几何学得到公认后的二十八年，德国数学家黎曼(1826—1866年)又创立了另一种几何学. 这个新的几何系统也是以欧氏前四组公理为基础（去掉了第Ⅴ组公理，也不采用罗氏公理），外加一个所谓“黎曼平行公理”而构成的.

黎曼平行公理是：同一平面上的任何二条直线一定相交.即过直线外的一点,一条平行于已知直线的平行线也作不出来.黎曼根据这样五组公理，同样推导出一系列的几何命题，这种几何学通常称为“黎曼几何学”.

“罗氏几何”、“黎曼几何”统称为非欧几何学.此外,仅从欧氏公理的前四组为基础（即不用欧氏、罗氏、黎氏第五公理），而展开的几何系统，称为“绝对几何学”或者叫做“几何基础”.

显然，凡属“绝对几何学”中的命题，在“欧氏几何”、“罗氏几何”、“黎氏几何”中都成立.因为这种命题的证明，既不用欧氏第五公设，又不用“罗氏公设”，更用不到“黎氏公设”.如

定理：若两个三角形的两边及其夹角对应相等，则两个三角形全等.

相反的，超出“绝对几何学”这一公共部分外的所有命题，在三种几何学（欧氏几何、罗氏几何、黎氏几何）中都是各不相同的.例如

在欧氏几何学中：

定理：三角形三内角和等于两个直角.

在罗氏几何学中：

定理：三角形三内角和小于两个直角.

在黎氏几何学中：

定理：三角形三内角和大于两个直角.

三种几何，到底那个对？

原来只有欧几里德几何学，由于对第五公设的争论，就出现了三种几何.而且，三种几何学中所得的许多命题、定义，又各不相同，甚至可以说有些命题是互相对立的.在一种几何学中，说是小于，在另一种几何学中就说是大于；在一种几何学中，说是可以引与已知直线相平行的直线，在另一种几何学中，就说不可引.那么，到底那个对呢？

这个问题回答起来很简单.比如，我们要去火车站，可能有好几条路可走.而且，这几条路开始一段是重合的，走一段距离后才开始分岔，但不管走向哪个岔路，最后一定都能到达火车站.再如书桌、办公桌、饭桌，到底那一个是真正的桌子.不言而喻，在第一个例子中，走哪条路都对；在第二个例子中，哪一个桌子都是桌子.通过这两个例子说明三种几何学都是对的，无可怀疑.并且，关于这三种几何学各自所有的命题都满足无矛盾性和完备性.这都有严格的数学证明.经过长期的科学实践，特别是爱因斯坦的相对论的产生，进一步证实了：在宇宙空间中（宏观或微观情况下）非欧几何更符合

于客观实际的需要；在日常生活中或工农业生产中，则欧氏几何学更为适用一些；而在地球表面研究航海、航空等问题中，则黎氏几何更为方便.

是的，用不着怀疑它们的正确性.正是由于非欧几何跳出了我们所习惯的圈子，它才变成了相对论里不可缺少的一个环节.科学家和工程师们如果要研究有关宇宙速度和超级距离的问题，或者要深入到原子、粒子世界里面去，他就要用相对论来认识和解释.罗巴切夫斯基有一句名言：“去问问大自然吧，它保有全部的秘密，一定会把你提出的问题回答得相当满意的.”

五　七座桥的故事和"图论"

在讲七座桥的故事之前，先向读者提个问题.

假设一个邮递员，每次递送报刊杂志信件，要走遍自己投递范围内的大街小巷，请问他按怎样的路线走，走的路才能最短？

显然，一个邮递员从邮局出发，走遍每条街，而且不重复地一条街只走一次，完成任务返回邮局，这是最短的邮路.

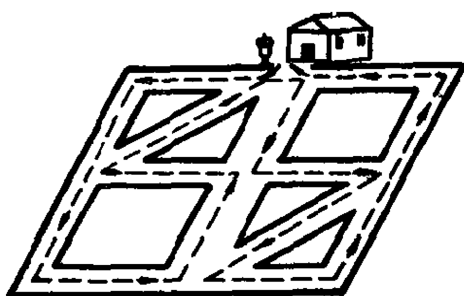


图 5 — 1

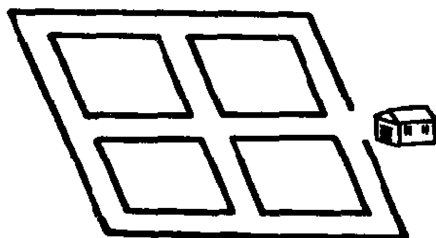


图 5 — 2

但是，这种最短路线，一定能找到吗？答案是：不一定.假如图 5 — 1 是某个邮递员的邮路，则最短邮路是存在的.（如图上箭头所指的路线）假如图 5 — 2 是某个邮递员的邮路.读者不妨试验一下，无论如何也不能为这位邮递员选出一条最短邮路.

七座桥的故事和"一笔画"

和这个问题相类似的，有一个"七座桥的故事".在十八世纪，东普鲁士有个城市叫哥

尼斯堡（现在属于苏联立陶宛加盟共和国东波罗的海的海岸地区，现名加里宁格勒）．城内有一条大河，河中有两个小岛，全城由七座桥将河的两岸和河中的两个小岛沟通，如图5－3．当时那里许多人热衷于一个难题：一个散步者怎样能一次走遍这七座桥，每座桥只走过一次，不能重复，最后回到出发地点。这就是有名的哥尼斯堡七桥问题．

这个题目似乎不难，试验起来也容易，所以，谁都愿意试试看，但是都毫无结果．于是，有人就写信给当时著名的数学家欧拉（1707—1783年）．经过千百人的失败，使他猜想：也许那样的走法根本就不存在．1736年欧拉终于严格地证明了这个猜想是对的，并且在圣彼得堡科学院的例会上，专门为解答这个问题作了一次学术报告．

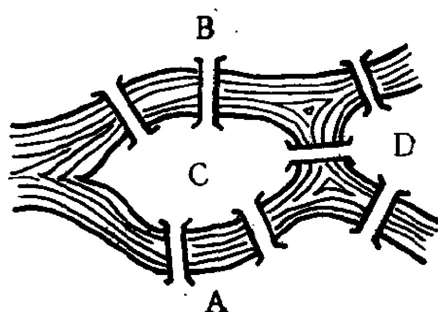


图5－3

欧拉解决的方法是：把“七座桥问题”抽象成一个“一笔画”问题．什么叫“一笔画”问题呢？就是：笔不离开纸，而且每条线只许画一次，不重复地画出一个图形．

如图5－4，分别以C、D两点表示两个小岛，以A、B两点表示南北两岸，每条线都表示连接两块陆地的一座桥．这样，就得到一个由四点七线组成的几何图形．如果这个图形能一笔画成，那么，“七桥问题”就能得出肯定的答案。

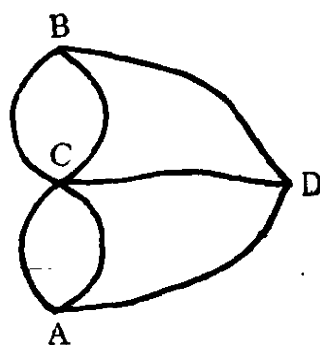


图5－4

我们先来分析“一笔画问题”如图5－5，都是能一笔

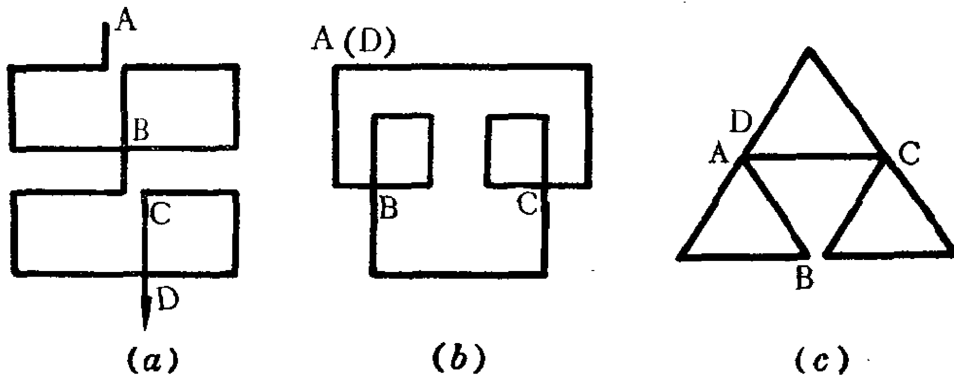


图5—5

画成的图形．A点为起点，D点为终点．B、C、E、F是交点．当线条通过交点时，都是画进去，再画出来（我们称为交点和两条线相联），或者是再画进去，再画出来（我们称为这个交点和四条线相联）．图5－5三个图中，除(a)图中的起点A和终点D外，其余各点都是与偶数条线相联．

如图5－6中的三个图形，都是不能一笔画成的图形．

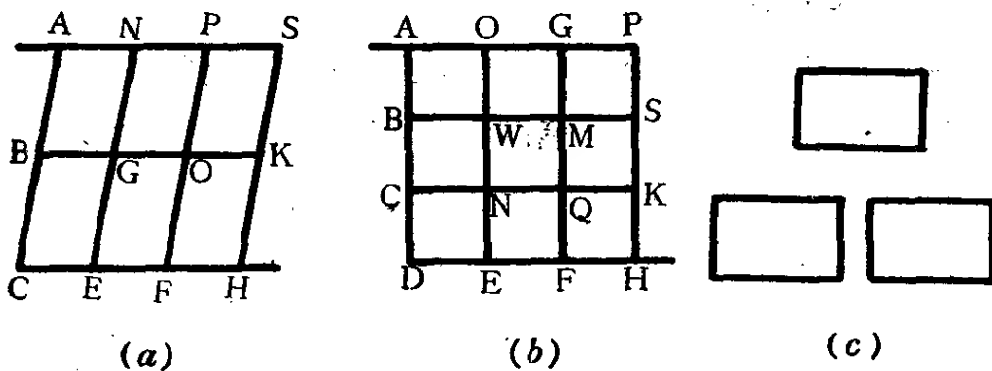


图5—6

容易看到（a）图中，除了A、C、H、S、G、O各点与偶数条线相联外，其余各交点都是与奇数条线相联．(b)图中和偶数条线相联的点是A、D、H、P、W、M、N、Q．其余各点都是与奇数条线相联．（c）图虽然各点都与偶

数条线相联，但是一个图形分成三个互不联系图形，显然，不可能一笔画出. 为了叙述方便，我们给出下面的定义：

若某点与偶数条线相联，称为偶点.

若某点与奇数条线相联，称为奇点.

这样，图5－5中（a）图中奇点个数是2，（b）图、（c）图中奇点个数是0. 而图5—6中（a）图奇点个数是6，（b）图奇点个数是8. 欧拉正是根据这样的分析猜想到：凡能一笔画成的图形，奇点的个数不能多余2. “七桥问题”所以使千百万人的试验失败，也许正是由于这个问题中奇点的个数是4. 但是，数学问题的结论，不能单凭猜想或者是如此简单的分析就能让人信服的. 因此，要彻底解决“七桥问题”，就必须先将“一笔画问题”给予严格的数学证明.

欧拉先引入如下几个概念：

若每条线都有两个相异的端点，由这样有限条线组成一个图形，叫做网络. 这些线叫做网络的弧，端点叫做网络的顶点.

互相衔接的一串弧，叫做一条路. 若一条路是首尾相接的，称为闭路.

若一个网络的任意两个顶点都可用一条路连接起来，那么，这个网络称为连通的. 否则，叫做不连通的. 例如图5—6中的（c）图就是不连通的网络.

网络的顶点由于和线相联，所以有奇点和偶点之分. 没有奇点的网络又叫做欧拉网络.

有了上述一些概念后，一笔画的问题就可以变为：一笔

能画成的图形必须具备哪些性质呢？答案是这个图形必须是连通的，并且奇点的个数是 0 或 2；反之，一个连通网络的奇点个数是 0 或 2，那么，这网络必定可以一笔画成. 显然欧拉网络就是一个可以一笔画成的图形.

欧拉证明了上述正、逆定理后，给出一个定理：

一个网络能够一笔画的充分必要条件是：它连通，并且奇点个数等于 0 或 2.

人们为了纪念欧拉，就把这个定理叫做欧拉定理.

欧拉定理把一笔画问题解决得非常好. 一方面它给出了充分必要条件，因而把一笔画和非一笔画的界线分得一清二楚；另一方面定理指出的条件简单明了，易于验证，用起来方便. 即使是一个很复杂的网络，判别它是不是一笔画，也用不了一两分钟.

根据欧拉定理可知，"七桥问题"中有 4 个奇点. 所以一个人不重复的走遍这七座桥是不可能的. 如果只有两个奇点，可以从这两个奇点之一出发，不重复地通过五个点，然后到达第二个奇点，这样的路线是存在的. 若一个奇点也没有，那末，无论从哪一点出发，不重复地通过各点又必然回到始点上.

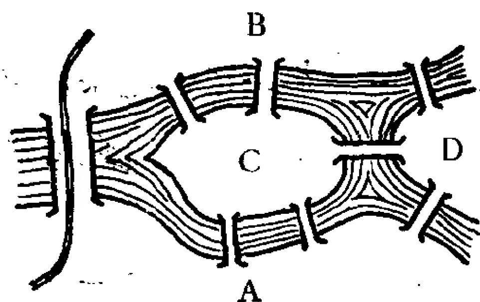


图 5 — 7

过了许多年，河上又架起了第八座桥——铁路桥（图 5-7）. 这座新桥的建成，使人们又想起了那有趣的问题. 既然一次走遍七座桥不可能，那末，一次不重复地走遍八座桥是否可能？从图 5 — 8 可以看到，这

时奇点的个数只有两个了（C点和D点），所以，一次不重复地走遍各桥是可能的了．例如从D点出发，依次走过7、4、2、1、5、8、6、3各桥而至C点，就一次走遍了八座桥．但是，要回到D点仍然是不可能的．

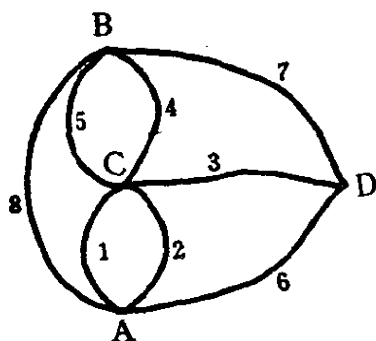


图5—8

随着时间的推移，又过了许多年，D、A之间一座新桥（9号桥）又落成了．当然，我们又要问，一次不重复地走遍九座桥，是否可能（图5—9）？除了8号桥外，能否一次不重复地走遍其余的八座桥（图5-10）？这些问题，当读者知道了欧拉的判别方法后，是非常容易回答的．

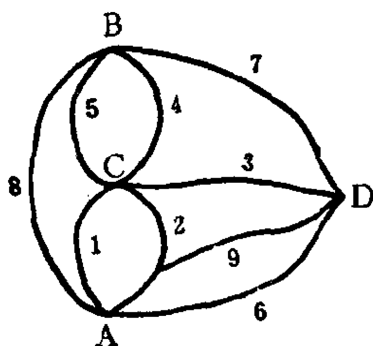


图5—9

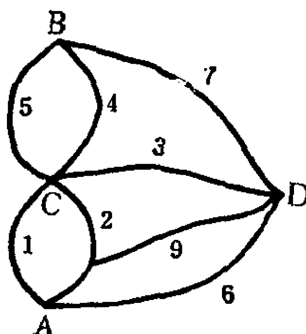


图5—10

当“七座桥问题”解决之后，邮递路线问题也就解决了，即要帮助投递员找到理想的邮路的充分必要条件是：投递范围的街道是连通的，并且奇点的个数不超过2．

一个崭新的数学分支的诞生

显然，欧拉花了这么大的精力，不会满足于只是解答一个“七桥问题”.欧拉注意到了，七桥问题，一笔画问题，都是一个几何问题.然而这种几何问题又区别于中学里的“平面几何”和“立体几何”．因为这种几何问题所研究的对象与是直线或曲线，长短、大小、面积、体积等性质和数量关系都无关，它只是着眼于研究点线之间的相关位置，或者说相互联结的情况.这样，由于欧拉的工作和许多人的共同努力，一个崭新的数学分支诞生了.当时欧拉把这类几何问题的研究叫做“位置几何学”.现在一般称为“图论”.

对于“图论”可以给出如下定义：

在数学领域中，专门研究这种由一组点和联接着点的一组线所组成的图的问题的学科叫做“图论”.它是数学的一个分支，在生产和科学研究中有着广泛的应用.因为许多问题都是研究某一类事物和它们之间的某种关系.若用点表示某一类事物，用线表示它们之间的某种关系，这样，就可以把要研究的问题，抽象成为由一组点和联接着点的一组线所构成的图，从而可以用图论的方法，使其获得解决.

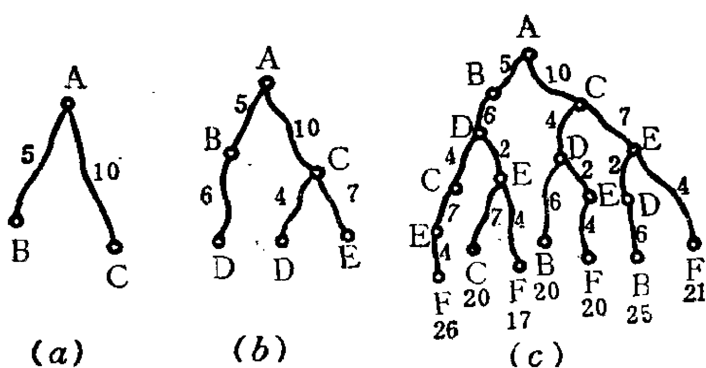


图 5—11

例如，用图论

的方法，很快就能帮助邮递员选出他的最短邮路：

如他从A地出发可直接到达B地和C地，用图5—11中(a)图表示（图中数字表示两地距离）.再从B地到D地和从C地到D地或者E地的路线用图5—11(b)图表示.这样继续作下去，便得到图5—11中(c)图之网络.这样，我们就很容易从网络中发现最短邮路.即$A \to B \to D \to E \to F$，这条路路程之和为17，其它几条路程和为20、21、26，都比17这个路程远.

象图5—11中的路线图，在图论中也叫"树".它是只有联接线，而不组成回路的图."树"在理论研究上和应用领域里有着十分重要的用途.化学中有许多分子结构式就是一个"树"型结构.所以，这类问题就可以采用图论的方法.如饱和烃的分子结构式就是"树"型结构，随着饱和烃中碳原子数量的增加，它的同分异构体的数量也大大增加，如果用化学方法，一个一个地寻找，那是十分麻烦的.而用图论的数学方法就比较简单方便，并且还可以画出各种同分异构体的结构图形来.由于"树"的结构简单易得，因此在图论的研究中有着特殊的地位.当一些新的设想还没有被论证之前，往往可以用"树"来验证一下，看看这些设想对于"树"是否成立.用图论的方法还可以解决输电线上最大输送能力的问题，运输线上的奇偶点图上作业的问题等等.

总之，图论的方法在统计力学、理论物理、化学的分子轨道理论以及电子技术中，都有着重要的应用.甚至在逻辑学、语言学的领域里，常用"树"来表示句子的语法结构.图论的广泛应用，促进了它的发展，今天，图论已成为数学

领域中一个十分活跃的分支.这也是一个大有可为的领域.相信不久就会有更多的人向这个领域大举进攻，并取得可喜的研究成果，为实现四个现代化贡献力量.

勤奋的数学家欧拉

上面提到的欧拉是十八世纪杰出的数学家.他刻苦攻读数学，研究数学，并为数学的发展贡献了一生.

欧拉1707年4月4日生于瑞士的巴塞尔城.他的父亲也很喜爱数学.因此，欧拉从小就受到数学的熏陶.他的第一位数学教师就是自己的父亲.当欧拉还是中学生的时候，就经常抽空到大学里去听课，并且很快就被当时著名的数学教授贝努里（1667—1748年）发现并受到重视.那时贝努里教授对欧拉的影响很大.父亲曾坚持让儿子学神学和语言学，可是欧拉怎能对神学发生兴趣呢？不久之后，欧拉就在贝努里教授的指导下专门学习数学了.

1725年，刚满二十岁的欧拉，就被贝努里的两个儿子请到彼得堡科学院，担任数学助教.他在俄国住了十六年.1741年又被菲特利二世请到柏林科学院工作.这样，他又在柏林住了二十五年.在这期间，他写了几百篇论文，还有“分析引论”、“变分学”等巨著.这位科学院的院士，一生几乎全部从事基础数学和应用数学的研究.1766年欧拉又由于叶卡德琳娜二世的邀请回到俄国工作.这时他已是举世公认的著名数学家了.

由于思考和计算上的过度劳累，他的双目相继失明了.

但是，他从来没有停止过科学研究工作．直到生命结束之前，他还在口述新的发现，让人笔录．他在世时发表的著作有530种之多．1783年他死后，人们又整理和发表了他的遗稿，并出版了他的全集，使他的著作数目增加到886部．这些著作以题材面宽，数量多而著称．法国数学家拉普拉斯(1749—1827年)说："读读欧拉，这是我们一切人的教师．"欧拉在他那个时代存在着的每一门数学中，都作出了重要的贡献．现代数学、天文学、物理学等许多学科中，几十个定理、公式和方法都是以他的名字命名的．就是身为一个中学生也会在三角、几何、代数等数学课程中，不止一次地遇到欧拉的名字．例如，把三角函数值看成是直角三角形中边的比的概念，就是欧拉给出的．

欧拉对科学事业的贡献是巨大的，所付出的艰苦劳动是不可斗量的．他这种刻苦、勤奋勇于攀登的顽强精神非常值得我们学习．

六 从“四色定理”说起

地图，这是每个读者都熟悉的．但是，绘制一张大地图最少用几种颜色呢？这个问题，许多数学家研究了百余年，才获得解决．它就是著名的“四色定理”．

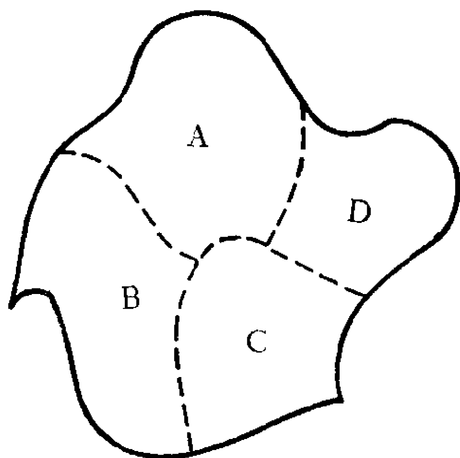


图 6 — 1

图 6 — 1 是表示某一国家的分省地图，图中虚线表示各省界．为了使人明显地区分开各省，所以地图上都要着色，而且要求相邻两省不许用同一颜色．可见图 6 — 1 用两种颜色是区分不开的，三种颜色就够了．A、B、C三省各用一色，D省用B省同样颜色就行．

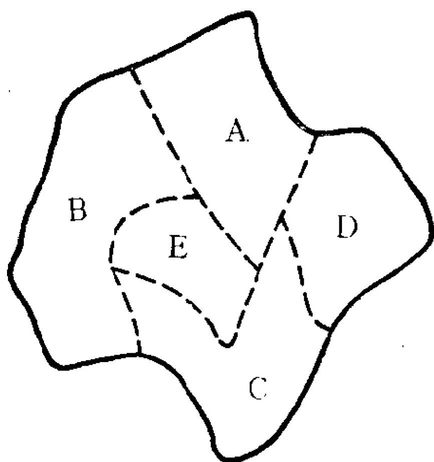


图 6 — 2

再看图 6 — 2 是有A、B、C、D、E五个省分的国家，如果还用三种颜色就区分不开了．因为A、E、D三省或者B、E、C三省各用一色，则其余两省用哪一种颜色都与相邻省分同色．所以，三种颜色不够用了．

若是省分较多最少得需要几种颜色才能区别开呢？

最先提出这个问题的，是德国的天文学家兼数学家茂比乌斯．他在1840年研究了这一问题，并且经过大量的试验，得到一个猜想："无论是多么复杂的地图，只要用四种不同的颜色，就可以绘出合格的彩色地图．"茂比乌斯访问了不少地图学家，他们按照自己多年的实践经验，也都同意茂比乌斯的猜想．如图6－2，有四种颜色就够用了．

单凭经验而没有经过严格的数学论证的结论，都是不能为科学家所接受的．因此，茂比乌斯就想根据数学的推理来证明这个"四色定理"．然而，他战斗了一生，却没有成功．

1879年，德国数学家肯伯声明自己证明了"四色定理"，并且发表了证明方法．可是，1890年英国数学家海胡特就指出了肯伯的证法是错误的．海胡特虽然多年研究"四色定理"的证明，但始终也没有解决．不过，他除了指出肯伯的证法错误外，还严格地证明了所谓"五色定理"，即"任何一张地图，用五种不同的颜色便够用了"．他把这个著名的难题，推进到只差一步就可解决的程度，当然也是很了不起的贡献．

"五色定理"解决了，可是近两百年来关于"四色定理"的研究，却毫无进展．

1960年有人证明了：对任何三十六省（或国家）以下的地图，"四色定理"恒成立．

直到1976年，美国三个科学家阿丕、哈肯和摩尔才最终证明了这个困难的"四色定理"．三个人中有一位是电子计

算机专家，证明中作了逻辑判断近100亿个，使用电子计算机计算约1200个小时. 一般的电子计算机如我国国产的709型计算机，平均每秒可以完成11万次运算，则1200个小时共进行了4752×10^8次运算，可见运算量之大是十分惊人的. 这样大的运算量，单靠人的脑力计算，是难以胜任的. 也只有当今电子计算机出现后才能解决. 这就表明，靠人与机器合作就有可能完成许多连最著名的数学家至今也束手无策的任务. 因此，这个难题的解决，标志着人类认识能力的一个飞跃，大大推动了以计算机为基础的人工智能的发展.

同时，人类从来就不会满足于已经取得的成就. "四色定理"解决了，"三色定理"能否解决，这又是新的难题.

对于任意一张地图，通过观察所有可能的涂色条件，也是能够解决的. 不过又涉及到非常繁杂且又十分庞大的数字计算. 如图6—3，这张地图只有17个需要涂色的区域，可是涂色方案就有3^{16}约4300万个. 不过图6—3确实可以用三种颜色来涂色的. 当然，这个涂色方案大体上是用猜测的方法得到的. 如图所示，一系列（猜测）涂色到J区域就中断了，因为J与三种不同颜色区域都相连，故J区域再不能用这三种颜色中的任何一种. 但这并不能说明三色问题的解不存在. 事实上，当互换K区和L区的颜色后，对剩下的地区继续进行一系列猜测涂色，则很快便得到答案. 当然，这绝对不是数学答案，那么，数学答案是什么？

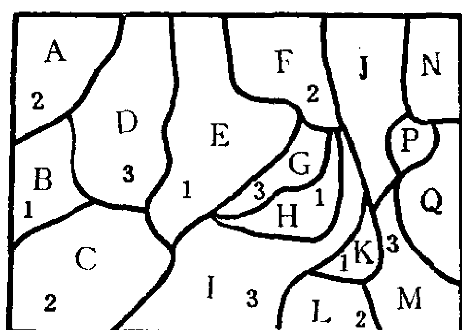


图6—3

"三色定理"如何解？尚待人们进一步去探讨.

"四色定理"的解决，一方面说明"世上无难事，只要肯登攀"的伟大真理；另一方面也说明，大力发展现代计算技术，对于我们攻占科学堡垒，向四个现代化进军是十分重要的. 电子计算机等先进技术，对于科学家来说，如虎添翼，我们一定使这对翅膀迅速丰满起来，去搏击科学的长空.

至于三个美国科学家到底是怎样证明"四色定理"的，由于证明过程太复杂，在这里就不赘述了.

那么，"四色定理"到底是属于那个数学分支的问题呢？这里要介绍一下有些读者感到陌生的一个数学分支——拓扑学.

拓扑学是"几何学"的一个分支. 一提起"几何学"，在我们的记忆中，总认为这是一门度量的科学. 它的主要内容是计算长度、角度、面积和体积，同时研究这些几何量之间的关系. 然而拓扑学与度量无关. 它是研究几何图形在一对一的双方连续变换下不变的性质的. 这种性质就叫做"拓扑性质".

在平面几何里，把一个图形搬到另一图形上，若完全重合，则这两个图形叫做全等形. 在搬动时由于有"移形公理"的前提，所以图形的大小、形状都是不变的. 如果将这个移形公理去掉，即在图形移动时可以伸缩和变形，这时，比较两个图形的线段、角度、面积的大小就没有意义了. 而拓扑学所考虑图形的"等价"（如同平面几何学中图形的全等），以及在这种"等价"之下有意义的几何性质，则是另

外一种类型的.

先用一个例子来说明这件事:设$\triangle ABC$与$\odot O$的位置关系如图6—4所示(这只是为了说起来方便,不是这种位置关系也一样,因为它们都可以伸缩和变形).显然,在平面几何里,它们不是"等价"图形.现在我们从$\triangle ABC$内的一点D向一切方向引射线,交$\triangle ABC$边上于X,交$\odot O$于Y,令线段DX按比例地伸长(或缩短)为DY,则$\triangle ABC$边上的各点就与$\odot O$上点一一对应起来,三角形的周界则恰好变成了圆周.这个把三角形变成圆周的变换就叫做"拓扑变换".这个变换的特点是

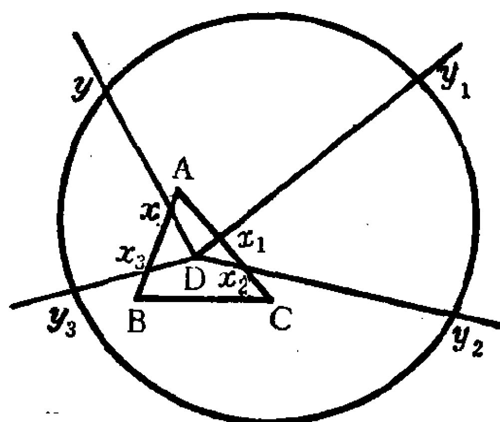


图6—4

(1) 三角形周界上的每一个点都对应圆周上的一个点.

(2) 三角形周界上的不同的两点对应圆周上的两点也不同.

(3) 三角形周界上邻近的两点对应圆周上的两点也邻近(这也叫连续变换).

因此,在拓扑学里三角形与圆是"等价"的,三角形的周界与圆周是"拓扑等价"的.从这个简单例子我们可以给出"拓扑等价"的定义:若图形A可以经过一个所谓"拓扑变换"变形到B,则说A与B是"拓扑等价"或称为"同胚"的.

直观一点说,如把一个橡胶皮球挤成南瓜样的扁球,或

者拉成黄瓜那样长的长条，只要不许撕破和粘连，那么，扁球和长条都与原来橡胶皮球是“拓扑等价”的.

拓扑学所要研究的是拓扑等价图形的公共性质、所共有的数量等，即所谓拓扑不变性质和不变量.

曲面的可定向性是直观上比较容易理解的拓扑（不变）性质.假如取两条细长的纸条$ABB'A'$和$CDD'C'$，将AA'端与BB'端粘合，得环形带R，再把CC'转180°与DD'粘合得到所谓茂比乌斯带（面）M.如图6—5所示.下面我们做一

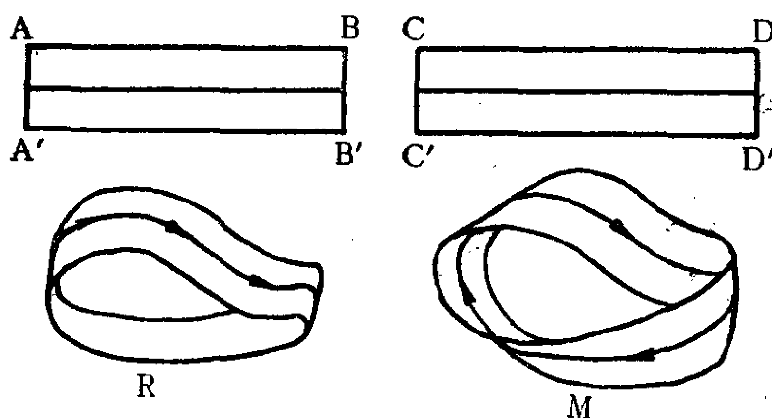


图6—5

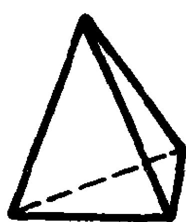
个试验，抓一个苍蝇放在R纸带上走一圈后（沿着箭头指出的方向），头的方向和没走时头的方向一样. 这就说明R纸带这个曲面具有可定向的性质，一般称R为双侧曲面. 茂比乌斯带M这个曲面就没有这个性质. 同样抓个苍蝇让它走一圈后，没走时腿是向下面的，走一圈后，腿变为向上方向了，即走到了起点的背面上了. 所以茂比乌斯带是不可定向的，一般称为单侧曲面.

可定向的性质是拓扑的不变性质. 可定向曲面不能拓扑等价于不可定向的曲面.

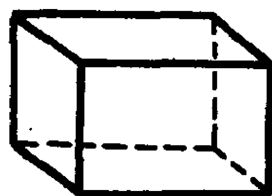
拓扑不变性质不仅是这一例，为了向读者介绍什么是拓扑学，只介绍这最为简单的一例.

下面向读者再介绍简单的拓扑不变量的一个例子.

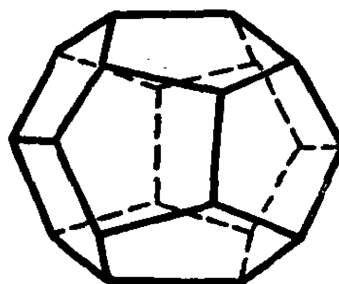
假设在一个橡胶球面上任意选一些点，再用不相交的线将这些点连接起来，当我们将这个球压成南瓜形的扁球，或者拉成黄瓜形的长条（当然还是不许撕破和粘连），我们可以想象出来，我们选的点的数目，连线的条数以及区域的数目都是不变的. 不仅如此，这些数之间还有一个非常有趣的关系.让我们从一些图形中把这个关系找出来.



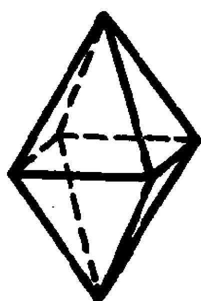
正四面体



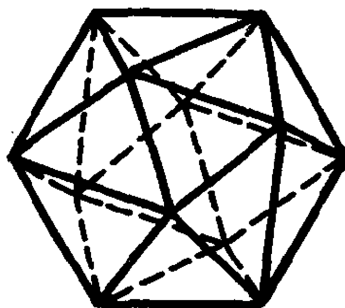
正六面体



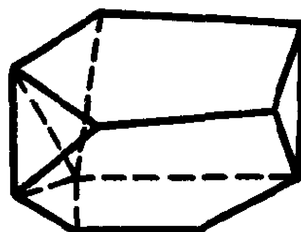
正十二面体



正八面体



正二十面体



不规则多面体（“古怪体”）

图 6 — 6 五种(正）多面体（只可能有这五种）和一个“古怪体”

这样一来，上面这个问题就变成了一个任意多面体的面、棱和顶点的数目之间有什么关系?

就图 6 — 6 中各多面体的这些数目我们可以数一数，

并记入下表：

多面体名称	顶点数 V	棱数E	面数 F	V + F	E +2
四 面 体	4	6	4	8	8
六 面 体	8	12	6	14	14
八 面 体	6	12	8	14	14
二十面体	12	30	20	32	32
十二面体	20	30	12	32	32
“古怪体”	10	17	9	19	19

从这个表中容易发现，顶点数V加上面数F与棱数E之差是2，而且每一个多面体都是如此．写出公式形状，即

$$V+F-E=2$$

不仅如此，你还可以画任意一个多面体，然后再检查上述公式还是正确的．可见这个公式是拓扑学上的一个普遍适用的数学定理，因为这个关系式并不涉及到棱的长短和面的大小.它只涉及到各种几何学单位（顶点、棱、面）的数目．

这关系式有意思的还在于这三个量不是同类量，但是，如此一算却为常数2.这个数叫做欧拉示性数．

欧拉示性数就是一个拓扑不变量．

关于$V+F-E=2$这个式子是十七世纪法国的大数学家笛卡儿最先注意到的，它的严格证明是欧拉作出的．这个定理在拓扑学中占有重要地位，被称为欧拉定理．

如果用s表示一张任意地图的国家数，用l表示它的国界数，用p表示顶点数；那么欧拉定理就可以表示为

$$s+p=l+2$$

并且用归纳法加以证明.

证明：关于地图的国界数l来进行归纳.

1．设$l=0$，那么$s=1$，$p=1$；在这种情形，

$$s+p=l+2$$

显然成立.

2．假设定理对于有n条国境的任意地图都成立，我们来考察含有$l=n+1$条国境、s个国家和p个顶点的地图.有两种可能情形.

a）对于地图的任意两个顶点，沿着地图的国境存在唯一的一条连结他们的路径．在这种情形，地图上一条闭线也没有．因而它象图 6－7 所示的形式；同时$s=1$．我们来证明：在这种地图上至少能找到一个顶点，只具有一条国界，如图6—7中的顶点A_1；这种顶点我们把它叫做极端顶点．若我们取地图的任意一个顶点(不妨取图6－7 中的A_2点)，如果它不是极端顶点，那么它至少是两条国界（A_3A_2和A_2A_4）的端点．沿这两条国界之一走到它的第二个顶点(A_3或者是A_4).如果这个顶点也不是极端顶点（如A_4），那么它又是另外某一国界（A_4A_5或A_4A_6）的端点；再沿着这两条国界之一走到它的第二个端点（A_5或者A_6)．以下类推．因为按照条件，地图上没有闭线，所以我们不能回到任何一个以前经过的顶点，而且根据地图顶点数的有限性，最

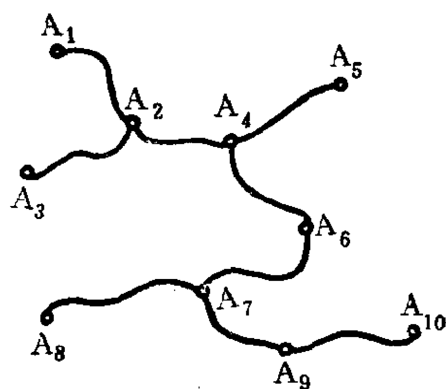


图 6－7

后一定会走到一个已经是极端的顶点．把这个顶点跟拿它当端点的那条唯一的国界除去，我们就得到一幅新的地图，在这幅地图上，

$$l' = l - 1 = n,\ \ s' = s = 1,\ \ p' = p - 1,$$

而且这幅新地图自然仍是联络的（所谓联络就是从点 A_1、A_2、$A_3 \cdots A_n$ 中的每一个点只沿国界走，都能到达任意的另一点）．根据归纳法的假设，

$$s' + p' = l' + 2,$$

由此

$$s + p = l + 2.$$

b）两个顶点存在一条以上的联络路径（如图 6 — 8 ）．

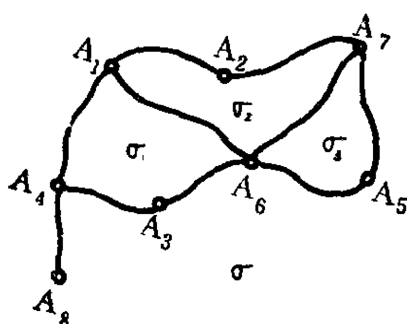


图 6 — 8

在这种情形，地图上有一个闭线经过这两个顶点．除掉这个闭线的一条国界（不连顶点），我们就得到一幅新的联络的地图．在这幅地图上

$$l' = l - 1 = n,\ \ p' = p,\ \ s' = s - 1.$$

按归纳法的假设，

$$s' + p' = l' + 2$$

由此

$$s + p = l + 2.$$

通过欧拉定理的这个简单的证明，使我们看到：“四色定理”所研究的问题是非常有意义的．这相当于把每个国家看成是地球体上的一个面，国界相当于面与面衔接的棱，几条国界之交点相当于地球体的顶点．而给这幅地图涂色的问题就抽象为由于面数、棱数和顶点数目的不同，最少需要多

少种颜色能够区分开的问题．这显然与国界的长短、国家版图的大小都无关．同时，也说明了对“四色定理”的研究，推动了“拓扑学”的发展；而拓扑学的理论也在“四色定理”的研究中得到了具体的应用．

七　你知道有多少孪生质数吗？

由于想知道有多少孪生质数，我们得先知道：什么是质数，什么是孪生质数，质数是怎样分布的，孪生质数又是怎样分布的．这样，才有可能知道孪生质数的数目．千里之行，始于足下．我们还得先从数说起．

有多少个质数

远在中古时代，就产生了自然数的概念（当然，那时还不知叫自然数）．印度人对数学最宝贵的贡献之一，就是采用了符号“1、2、3、4、5、6、7、8、9、0”来记数，彻底地完成了古巴比伦关于“有数位的记数法”．这样一来，自然数列1，2，3，4，5，6，7，8，9，…的概念很快就形成了．法国数学家拉普拉斯（1749—1827年）曾对此评论说：“用很少几个符号，表示所有的数目，使符号不仅具有形状上的意义，还具有数位的意义．这一思想是如此自然，如此使人容易了解，简直无法估计它的奇妙的程度．拿阿基米德和阿波罗尼两人来说吧，他们是和欧几里德同时代的希腊数学界最伟大而最有天才的人，但他们两位也没有想出这样记法，可见取得这一成就是多么不容易啊！”

正是由于得到了“数”的合理记法，对于数的研究才呈

现了一个新的局面．近两千年，尤其是近百年来，人们时刻都在研究数的变化规律，并且已经取得了辉煌的成就，创立了一个完整的数学分支——“数论”．众所周知，自然数列有着许多简单而又十分重要的性质：如数是无穷多个，且无最大的数；其次自然数集合可以按约数的情况分成三大类．

第一类：1（约数只有一个，即1本身）．

第二类：素数（约数只有两个）．即凡是约数只有1和它本身，而无其它约数的自然数都称为素数，一般习惯叫做质数．

第三类：合数（约数多于两个）．即凡是约数多于两个的自然数都称为合数．

1是个非常特殊的自然数．“再没有什么东西看起来比这个数量单位更简单了”．可是，“再没有什么比1更多样化了”．它继续自相加下去就可以得出其它任何整数；1的正幂、负幂和分数幂都等于1本身；1是一切分子分母相等（零除外）的一切分数的值；0以外的任何数的零次幂都等于1；对数为0的数都等于1．观察1的这些有趣的特性，就不难理解恩格斯关于“1和多是不能分离的，相互渗透的两个概念，而且多包含于1中，正如1包含于多中一样”的论述．

欧几里德证明了质数的个数是无穷多个，且无最大者．即

定理：质数的个数是无限的，并且不存在什么最大的质数．

〔证明〕：我们用反证法来证明．

假设存在着一个最大的质数，用P来表示，我们考虑所有质数的积与1的和，即

$$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot\cdots\cdot P+1,$$

这个数当然比P要大得多.

现在将这个数用任意一个质数来除（注意我们已经假设P是最大的质数）. $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot\cdots\cdot P+1$这个数是由两部分所组成，第一部分是所有质数的积，当然可以被任意一个小于P的质数整除. 第二部分是1，显然除了1以外什么数也不能整除，当然任意的一个质数也不能整除. 总之这个数不能被任意质数整除. 这就说明$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot\cdots\cdot P+1$这个数，或者本身就是质数，或者能被大于$P$的质数整除. 总之，与假设$P$为最大质数相矛盾. 所以，质数是无穷多个的，且无最大的质数. 定理得证.

我们还可以看到，除了2以外的所有质数，可以表示如下两种形状（反之不然，读者可以验证）：

5，13，17，… 可以表示为$4n+1$的形状.

3，7，11，… 可以表示为$4n-1$的形状.

只有一个质数2是偶数，其余的质数一律为奇数. 因为奇数被4除时，余数只可能是1或者3. 所以任何质数都属于这两种形状中的一种，但是，并不是任何$4n\pm1$这种形状的数都是质数.

当我们将质数分为上述两类后，这两类质数的个数各是什么情况呢？即两类都是无穷多呢，还是一个有限，另一个无穷呢？两类不会都是有限的这是显然的.

答案是两类都是无穷多个. 对于$4n+1$这种形状的质数

个数，证法繁难，这里只就形状$4n-1$的质数是无穷多的情况加以证明.

引理：若干个$4n+1$形状的数的乘积仍是$4n+1$形状的数.

设有两个此类形状的数$4m+1$和$4n+1$. 两者互乘得：

$$(4m+1)(4n+1)=16mn+4m+4n+1$$

$$=4(4mn+m+n)+1=4K+1$$

其中$K=4mn+m+n$是表示整数的. 由此可见，两个$4n+1$形状的因子乘积仍然还是$4n+1$的形状. 取三个、四个…这样形状的因子相乘，我们可以用数学归纳法证明，引理的结论是正确的.

现在转而证明$4n-1$形状的质数的个数是无穷多的.

假设$4n-1$形状的质数，只有有限个，不妨设是m个. 用P_1，P_2，…P_m来表示它们. 则考虑数

$$A=4\cdot P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdots P_m-1$$

这个数至少有一个$4n-1$形状的因子，因为它本身就是$4n-1$的形状. 根据引理，$4n+1$形状因子的乘积仍然有$4n+1$的形状. 所以，在数A的质因子中间，应该有某一个质数$P=4n-1$. 而P又不可能是P_1，P_2，$P_3\cdots P_m$中的任何一个，因为，A不能被其中任何一个整除；这个P是$4n-1$形状的质数. 因而，数P_1，$P_2\cdots P_m$就不能包括$4n-1$形状的所有质数；而这与假设相矛盾. 因此，$4n-1$形状的质数是无穷多的.

$4n-1$形状的数组成一个等差数列，也就是说上述定理可以表示为：在等差数列

3，7，11，15，19，…，

中包含着无穷多个质数．

我们不难理解，在首项是 1，公差也是 1 的等差数列中（即自然数列）也包含着无穷多个质数；在形状为$4n+1$的数列中也包含着无穷多个质数．

在十八世纪末到十九世纪初，德国著名数学家狄里克莱（1805—1859年），在许多数学家热衷研究各式各样的等差数列中包含质数个数的问题上，得到了一个著名的定理，并且完全解决了这样一个课题．他证明了“任何一个算术级数，只要首项和公差是互质的，就必定包含了无限多个质数”．这个定理不是在初等数学范围内所能解决的，所以这里不再证明．

质数的奇妙分布

质数在自然数列中分布的很奇妙，许多人一直想找出这个分布规律来．从公元前三世纪开始到现在，仍然没有彻底解决．

公元前三世纪古希腊数学家兼哲学家埃拉托色尼，为了研究这个问题，提出了一种名叫“过筛”的方法，造出了世界上第一张质数表（就是按照质数的大小排列成表）．他把一张大纸平整地蒙在一个框子上，然后把自然数列按其大小，一个一个地写上去，再将合数挖掉．这样一来，好象合数都被一个筛子筛掉了，筛子里剩下的都是质数．如图7—1，这个筛子好就好在让人们一目了然地看到100以内质数分布的规律．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

图 7 — 1

尽管人们至今还没有完全掌握这一规律，但是，很早就从这个“筛子”中看到许多有趣的规律. 如表的开头部分，质数分布得比后面的要稠密得多；越与 1 距离得远，质数分布的就越稀少；在从 1 到10之间就有 4 个质数 2 ，3 ，5 ，7 ，而在90到100之间只有 1 个质数97. 如果要在一张大的质数表中还可以看到，在997到1009这两个质数之间，全部11个数都是合数. 如果再往后看，质数分布就更稀少了. 我们甚至可以证明：有这样一个数字间隔存在，这个间隔中的100个连续的数，完全是合数.

我们来证明这一事实. 首先考虑从 1 到101间所有的整数的乘积，即

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot 99\cdot 100\cdot 101.$$

这是一个很大的数（它约等于$95\cdot 10^{158}$，也就是比普通的“天文数”要大得多）. 为了书写方便，我们用字母 A 表示这个大数. 进而考虑数列

$$A+2,\ A+3,\ A+4,\ \cdots,A+99,A+100,A+101.$$

这是一个由100个连续整数组成的数列. 我们可以断言，这一

百个数全是合数.为什么呢？我们不妨在这里面任意考虑一个，例如考虑$A+37$这个数，它能被37整除，因为A中含有37这个因数，所以A能被37整除，$A+37$中的37显然能被37整除，所以$A+37$这个数就能被37整除，于是就证明了它是合数.

为了进一步考虑质数的分布，我们可以提出这样的问题加以讨论.即在给定的范围内质数所能占的百分比有多大？这个比值是随着数的增长而加大呢？还是减小？或者近似为常数呢？

我们采用试验的方法（这种方法在研究数论上是常用的，不妨称之为探索性思考法），即通过查找各种不同数值范围内质数数目的方法，来解决这个问题.这样我们看到100之内有26个质数，在1000之内有168个质数，在1000000之内有78498个质数，在1000000000之内有50847478个质数.把质数的个数除以相应范围内的整数个数得出下面这个表

数值范围	质数个数	比　　率	$\frac{1}{lnN}$	偏　差
1—100	26	0.260	0.217	20
1—1000	168	0.168	0.145	16
1—10^6	78498	0.078498	0.072382	8
1—10^9	50847478	0.050847478	0.048254942	5

从这张表上首先可以看到，随着数值范围的扩大，质数的个数相对减少了.但是,并不存在质数的终止点.

有没有一个简单的方法，可以用数学形式表示这种质数

比值随数值范围的扩大而减少的规律呢？有的.并且这个有关质数平均分布的规律已经成为数学上最值得称道的重要发现之一.这条规律又非常简单.就是从 1 到任何自然数N之间所含有质数的百分比，近似由N的自然对数的倒数所表示，N越大，这个规律就越精确.

所谓自然对数就是以数$e \approx 2.718\cdots$为底的对数.如果对这种对数不习惯的话，可以通过换底公式变为常用对数：如

$$lgx = 0.43429lnx$$

从上表第四栏中，可以看到N的自然对数的倒数，把这栏的数和前一栏即第三栏比率中对比一下，就会看到，两者是很相近的，并且N越大，它们也就越相近.

有许多数论上的定理，开始时都是凭经验作为假设提出的，而在很长一段时间内得不到严格证明.上面这个质数分布定理也是如此.直到上个世纪末，法国数学家阿达母和比利时数学家布散才终于给出了完整的证明.

又是一个大难题

现在可以讨论本节一开始时提出来的问题了.孪生质数到底有多少对.在质数表中，我们容易发现另一个规律，即许多相邻二奇数又都是质数.例如，3和5；5和7；11和13；17和19；29和31；41和43；59和61；71和73；等等.一般地说：如果P和$P+2$（$P \geqslant 2$）都是质数的话，则把P和$P+2$叫做孪生质数，或称质数偶.如上述八对孪生质数，是在数值范围为100以内的.501到600这段数值范围内，只有521

和523；569和571两对.当然，只要在质数表上再往后看，还可以找到更大的孪生质数，如5971847和5971849.不过，可以看到这种孪生质数的分布也是极不均匀的.一般说来，它们的分布也是越来越稀少，与质数相比较，还要稀疏得多.

这一发现，很早就引起古代数学家们的兴趣，并且，对它提出了一系列十分不易解决的难题.如孪生质数的分布规律是什么?共有多少对孪生质数?或者说有无最大的一对孪生质数等等.

质数的个数问题早已解决了，似乎孪生质数的个数问题是不成问题的.然而，出乎所料，就是这个孪生质数的个数问题，或者说孪生质数的个数是否也有无穷多的问题，数千年来都没有解决，甚至连解决这个问题的途径都还没有找到.至今仍然如此，成为当今数论中又一个大难题.现今所知道的最大的孪生质数是$76\times3^{169}-1$和$76\times3^{169}+1$，这个结果是威廉斯和察恩克得到的.

当然我们也可以提出如5，7，11，这样三个连续的质数组的问题（不妨叫做三生质数）是否也有无穷多组，分布规律又如何？这样的问题更难于解决了.不过由于高速电子计算机的飞速发展，计算能力的迅猛提高，相信这些难题将会随着时间的推移和数学方法的改进，一个一个地被解决的.

八 “哥德巴赫猜想”只差最后一步

抗日战争刚结束后不久，福州市的一个中学“英华书院”来了一位知识渊博、诲人不倦的数学教师．在数学课上他给学生们讲了许多有趣的数学故事．有一次，他向学生们讲了“哥德巴赫猜想”的难题，并且说：“自然科学的皇后是数学，数学的皇冠是数论，‘哥德巴赫猜想’则是皇冠上的明珠．”这些话，深深地打动了学生陈景润的心，鼓舞着他立志要去摘取这颗明珠．有志者，事竟成．经过二十多年的奋战，陈景润已经离拿下这颗明珠只差一步了．那么，这颗明珠到底是怎么回事呢？

两百多年前德国数学家，彼得堡科学院院士哥德巴赫（1690—1764年），曾以大量的整数做试验，结果使他发现：任何一个整数，总可以分解为不超过三个素数的和．但是，他不能给出严格的数学证明，甚至连证明该问题的思路也找不到．因此，1742年6月7日，他把这个猜想写信告诉了与他有15年交情，当时在数学界已享盛誉的朋友欧拉．信中说：“我想冒险发表下列假定：大于5的任何整数，是三个素数之和”．欧拉经过分析和研究，在回信中说：“我认为每一个大于或等于6的偶数都可以表示为两个奇素数之和”．欧拉又进一步将这个猜想归纳为以下两点：

（1）任何大于等于6的偶数都可以表示为两个奇素数之和.

（2）每个不小于9的奇数都可以表示为三个奇素数之和.

我们可以利用一些具体的数字进行验算，明显地看到欧拉上述两个猜想的正确性，如

$6=3+3$　　$18=11+7$

$8=3+5$　　$20=13+7$

$10=5+5$　　……

$12=5+7$　　$48=29+19$

$14=7+7$　　……

$16=13+3$　　$100=97+3$

以及

$$9=3+3+3$$

$$11=3+3+5$$

$$13=3+3+7$$

……

$$27=3+11+13$$

……

$$103=23+37+43$$

同时，欧拉的两个命题是有联系的．容易发现：第二个命题是第一个命题的直接推论，若第一命题正确，就能非常简单地推出命题二是正确的.

因为，假设命题一正确，我们设奇数$A\geqslant 9$，则

$$A-3\geqslant 6$$

而且$A-3$是偶数.

由命题一可知，必有两个奇素数n_1、n_2，使得

$$A-3=n_1+n_2$$

所以

$$A=3+n_1+n_2$$

因此，命题二是正确的.

由此可见，命题一的正确性被证明了，“哥德巴赫猜想”也就彻底解决了.

后来，人们就把命题一简单地表示为（1＋1），并且称为“哥德巴赫——欧拉猜想”.

恩格斯说：“数是我们所知道的最纯粹的量的规定．但是它充满了质的差异．”差异即矛盾，而矛盾又贯穿于每一事物发展过程的始终．研究整数内部矛盾的特殊性及其相互联系，并非是一种无聊的游戏，而是发现整数之间的联系与规律的一个重要方面．哥德巴赫问题就是把素数与加法运算联系在一起．这样就表明，一个大于2的整数不仅可以等于几个素数的连乘积，如$4=2\cdot2$，$6=2\cdot3$，…而且还可以等于少数几个素数的和，如$4=2+2$，$5=2+3$，$9=3+3+3$等.

哥德巴赫问题所以引起人们极大的注意，并激励着不少人为解决这一难题而奋斗一生，其原因就在于：若解决这样的问题就必须引进新的方法，研究新的规律，从而可能获得新的成果．这样就会丰富我们对于整数论以及整数论与其它数学分支之间相互关系的认识，推动整个数学学科向前发展.

1900年著名德国数学家希尔伯特在国际数学会的演讲

中，把哥德巴赫猜想看成是以往遗留的最重要的问题之一，介绍给二十世纪的数学家们来解决．1921年英国数学家哈代在哥本哈根召开的数学会上说过，哥德巴赫猜想的困难程度可以和任何没有解决的数学问题相比．二百多年来，这个难题吸引了世界许多著名的数学家，付出了艰苦的劳动．虽然这个问题至今还没解决，但是进展很大．十九世纪数学家康托耐心地试验了从2到1000之内所有偶数命题——都对；数学家奥倍利又试验了从1000到2000以内所有偶数命题——也是对的，即他们二人连续验证了，在2到2000这个范围内，任何大于或等于6的偶数都可以表示为两个奇素数之和．

在1911年梅利又指出从4到9000000之内绝大多数偶数都是两个奇素数之和（即他共验证了449986个偶数命题——是正确的，只有14个偶数他没能验证出来）．后来更有人一直验算到了三亿三千万之数，都表明哥德巴赫猜想是正确的．上述一些数学家们，虽然做了大量的工作，但都没有离开验算的轨道．

1923年两位英国数学家嘉尔德和立特伍德在解决哥德巴赫问题的探索中得到新的进展．他们虽然没有解决这个难题，但是却使这个问题与高等数学中的解析函数论建立了联系．一方面为解决这个问题搭了第一座桥，使哥德巴赫问题解决的途径从验证阶段踏上了解析证明的新征程；另一方面在两个不同的学科间发现了微妙的联系，从而会引伸出许多新的发现，为奠定新的理论打下基础．

直到1930年，这个难题才有了决定性的转折．苏联青年

数学家西涅日耳曼（1905—1938年）采用筛法和数列密度法证明了“任一大于等于9的自然数，一定可表示为不超过300000个奇数之和”（注意任一大于9的自然数，上述定理都成立，则任一大于9的偶数，上述定理当然也成立）．这个结果与哥德巴赫猜想相比，似乎非常滑稽可笑，然而，正是这个定理为证明哥德巴赫问题找到了新的方法．西涅日耳曼感到要从哥德巴赫问题的原来形式去证明是徒劳的，于是提出一个孪生的问题．在形式上变化了，复杂了，但在实质上却简单多了．因为，一个能表示成一百个素数之和的数，未必能表示成三个或二个素数的和．可是一个数若能表示成一百个素数的和的问题得证，就能使一个数表示成三个或二个素数之和的问题的证明变得容易了．在数学上为了证明某个命题，常常需要把它变化一下形式，即变成它的等价命题或者是放低要求的命题．新命题证完，原命题立即得证或者容易证．

西涅日耳曼提出：是否存在一个完全确定的，但又是尚未知道的整数(用C来表示)，使任何自然数都可表示成不超过C个素数和的形状？换言之，不论N是怎样的自然数，总可以将它写成

$$N=P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n$$

的形状．其中P_i（$i=1,2,\cdots n$）均是素数，而n一定是小于C（至多等于C）的整数．若能证明$C=2$，那么，哥德巴赫问题就被证明了．西涅日耳曼开拓了这条新路，找到了解决老问题的新方法，受到人们的称赞，并把C称为西涅日耳曼常数．有开拓者就有后继人，后来又有不少数学家把C这个

数降到67，也就是不论怎样大的偶数，都可以表示为至多是67个素数之和的形式．如有人将835042×10^{21}和9^{9^9}这样大的数，进行了判定，结果证明了它们都可以表示为不超过67个素数之和．虽然这个问题离哥德巴赫问题的解决，相距遥远，但是，不论一个偶数是怎样之大，都可将它表示成为若干个素数之和的问题已被证明是正确的．

1937年苏联另一位数学家维诺格拉道夫，把西涅日耳曼常数又降到4，之后又凭借它自己创立的一种新的数学方法——估计指数和的方法，证明了：每一个充分大的奇数都一定可以表示为三个奇素数之和，将哥德巴赫猜想的第二个命题解决了．正是由于维诺格拉道夫创造了新的数学方法，解决了“半个”世界著名难题所取得的巨大成就，被授予社会主义劳动英雄的称号，并获得了斯大林奖金．

我国对这个问题的研究也有很长的历史，并且也取得了不少研究成果．做出了很大贡献．这是非常值得我们自豪的．

大家非常熟悉的我国著名数学家华罗庚教授，早在本世纪三十年代就开始这项研究工作，并取得了一定的研究成果．解放后在华罗庚、闵嗣鹤两位教授的指导下，我国一些年轻的数学家不断地改进筛法，对哥德巴赫猜想的研究，取得了一个又一个可喜的研究成果，轰动了国内外的数学界．

1958年我国数学家王元证明了

偶数＝（2＋3）．

1962年我国数学家潘承洞又取得：偶数＝（1＋5）的可喜成果．

同年，王元和潘承洞又证明了

偶数＝（1＋4）

一提到哥德巴赫猜想，广大读者一定会想到陈景润．这位1953年厦门大学毕业的我国青年数学家经过二十年的刻苦钻研，在研究哥德巴赫问题上，有着惊人的毅力和顽强的精神．1965年苏联数学家维诺格拉道夫、布赫斯塔勃和朋比利又证明了：偶数＝（1＋3）．这个结果在当时已经是很了不起的成就了，再向偶数＝（1＋2）挺进，已使很多人十分恐惧．然而，陈景润还是不畏劳苦地攀登着．由于他精心地分析和科学地推算，不断地改进"筛法"，大大地推进了哥德巴赫问题的研究成果，取得了世界上领先的地位．1973年他终于证明：每一个充分大的偶数，都可以表示成一个素数及一个不超过两个素数乘积的和．即：

偶数＝（1＋2）．

若把两个素数乘积变成是一个素数即：

偶数＝（1＋1）．

哥德巴赫问题——这颗皇冠上的明珠就被彻底地摘下来了．

陈景润的成就，在国内外引起了高度的重视．我国数学家华罗庚和闵嗣鹤都曾高度评价他的研究成果．英国数学家哈伯斯坦和西德数学家黎希特合著的《筛法》一书，原有十章，付印后又见到陈景润的（1＋2）的成果，感到这一成就意义重大，特为之添写了第十一章，标题叫做"陈氏定理"．

陈景润二十多年如一日坚持解析数论的研究工作，不断地取得可喜的研究成果．他把等差级数最小质数的估计，作了显著的改进；还把前面提到的维诺格拉道夫和华罗庚长期研究解决的"三角和估值法"做了圆满的改善；在"华林问

题”、“殆素数分布问题”方面也都作了很多工作．至今，他已发表有关论文40多篇．

哥德巴赫猜想离彻底解决仅一步之差了．但是，这即将登上顶峰的最后一步，也是极端困难的一步．不过看到陈景润的研究成果，看到我国数学才能卓著的年轻人不断涌现，看到广大科学家为攻克一个个堡垒而表现出来的顽强毅力，使我们相信，登上顶峰、走完这艰苦的一步，肯定是为期不远了．

九　在寻找质数公式的崎岖道路上

普耶尔·费尔马(1601—1665年)是个法律学家，也是他的故乡——法国土鲁兹城的著名社会活动家.尽管他是在业余时间里研究数学，可是他的法学才能远远不如他的数学才能驰名.他在世时没出版过什么著作.他死后，他的儿子才将他的数学遗稿整理出版.

费尔马几乎与他同时代的所有著名数学家都有联系和交往.他和笛卡儿共同奠定了“解析几何学”的基础,和巴斯嘉奠定了“概率论”的基础.他最出色的成就，还是在“数论”方面的研究结果.他常常故意把一些难题寄给熟人去做,即使是非常著名的数学家也往往不能完成他交给的任务.

历代著名的数学家们为了寻找一个公式来表示所有的质数，不知花费了多少精力,走过了多少艰难曲折的道路.费尔马在这方面也不例外.他曾给出一个表达式：

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

并且断言当$n = 1, 2, 3, \cdots$时，F_n表示一切质数.F_n也就是我们在“分圆问题”中提到的高斯判别法中费尔马数的公式.经过验证：

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3; \quad F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5.$$

$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$； $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$；

$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$；…

当$n = 0$，1，2，3，4时，F_n确实都是质数.费尔马也算出了$F_5 = 4294967297$.但是，由于这个数很大，分解较难，他没加以分解，便认为F_5也是质数.于是他就断言："当n是任何正整数时，Fn总表示质数."通常人们称F_n为费尔马数.正是由于这位大数学家一时的疏忽，而得到一个错误的结论.后来1732年也是在这个崎岖道路上行走的数学家欧拉指出了费尔马的错误.欧拉得到：

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

而641是质数，从而费尔马的断言被否定了.

在数学的许多方面建树功勋的欧拉，在寻求质数公式时，也曾设想用一个二次三项式：

$$\varphi(n) = n^2 + n + 41$$

来表示质数，然而也失败了.不难验证，当n等于从1到39所有整数时，这个三项式的值都是质数，可是当$n = 40$时：

$$\varphi(40) = 40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$$

就是合数了.和费尔马一样，也没能给出一个以正整数为自变量，而函数值都是质数的解析表达式.

通过这两位著名数学家的教训，使我们看到不完全归纳法常常是不可靠的.绝不能根据对一些特殊情形的判断，马上就过渡到一般情形的结论，并作为规律或普遍法则.这样做是太冒险了.必须经过周密的研究，大量的判断，并且给予严格的数学论证，然后，或者成为规律、法则；或者因为错误

而被否定.所以，欧拉说的对："简单归纳法会得出错误的结论."还有一个说服力更强的例子，试看形如：

$$\varphi(n)=991\cdot n^2+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

所表示的数.我们分别将1，2，3，4，…等自然数代入上式，所得的数值都不是完全平方数，甚至你花上毕生的精力去一个一个地计算，也不会发现例外.但是，数学上却决不允许因此而得出$\varphi(n)$对一切自然数n都不是完全平方数.事实上当

n =12,055,735,790,331,359,447,442,538,767的时候

$$\varphi(n)=991\cdot n^2+1$$

却是一个完全平方数.谁能想到当n取一个29位的大数而使$\varphi(n)$不为完全平方数这一结论遭到破坏呢，谁能有那么大的耐性一个数一个数的从1，2，…，一直让n取到29位的大数去验算$\varphi(n)$是不是完全平方数呢？

质数问题纠缠了人们二千多年.不少数学家在这漫长而曲折的道路上，刻苦研究质数公式的问题.费尔马、欧拉两位大数学家虽然在寻求质数公式的崎岖道路上，有过失败，但他们在"数论"的研究方面取得了不少研究成果，使"数论"的内容不断丰富，成为一个强有力的数学分支.所谓费尔马小定理的确立，就是一个例证.

为了读者能顺利地了解这个定理，我们先来研究奇数的平方与1之差，即表达式m^2-1，（其中m为奇数）

$$m^2-1=(m+1)(m-1)$$

既然m为奇数，则上式的右端一定是两个相邻的偶数之积，

而且两者之差为 $(m+1)-(m-1)=2$，所以，这两个相邻偶数必定有一个能被4整除，而且另一个又是2的倍数.因为，如果两个偶数中，有一个不能被4整除，则它被4除时，余数一定是2，即可写成 $4n+2$ 的形式（其中 n 为自然数）那么，与它相邻的另一个偶数必为 $4n+4$ 或者是 $4n$. 两者都是2的倍数.从而可知，无论 m 为什么样的奇数，m^2-1 总能被2整除.

再看任何数的立方与此数之差可以被3整除，即表达式 m^3-m，可以表示为：

$$m^3-m=m(m+1)(m-1)$$
$$=(m+1)m(m-1).$$

这个式子说明任何自然数的立方与此数的差等于三个连续自然数的积.这三个连续自然数中，至少有一个是偶数（即能被2整除），也必定有另一个数能被3整除.因为，三个连续自然数不妨设为 K，$K+1$，$K+2$.则第一个数的形状不是 $K=3n$，就是 $K=3n+1$，或者是 $K=3n+2$（其中 n 为自然数）.一个数以3除，其余数只有0，1，2三种情形.如果是第一种情形，即 $K=3n$.则结论成立；如果是第二种情形，即 $K=3n+1$，则第三个自然数 $K+2=3n+3$，就能被3整除.如果是最后一种情形即 $K=3n+2$，则第二个自然数 $K+1=3n+3$ 就能被3整除.所以，不论在什么情况下，三个连续自然数的积一定能被3整除.

类似地可以证明 m^5-m 也能被5整除.（由于证明较繁，这里从略）.而 m^4-m 则不能被4整除.如取 $m=2$，$m^4-m=16-2=14$，就不能被4整除.综上所述，我们可以

提出如下两个问题：（1）当a是怎样的一些数时，不论m是怎样的数，m^a-m总能被指数a整除；而当a是另外的一些数时，就不一定能整除.

(2)三个连续自然数的积，不仅能被3整除，而且能被6即$1\cdot2\cdot3$的积整除；五个连续自然数的积，不仅能被5整除，而且能被1、2、3、4和5的连乘积120整除，能不能推广到一般情形，即m个连续自然数的积

$$K\cdot(K+1)(K+2)\cdots(K+m-1)$$

能被自然数列头m个连续数的积

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(m-1)m$$

整除而无余数.

我们先讨论第二个问题.学过排列组合和牛顿二项式定理的读者会发现

$$\frac{K(K+1)(K+2)\cdots(K+m-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(m-1)m}$$

这个商数就是等于从$K+m-1$个元素中，每次取m个的组合数.或者说是$(a+b)^{k+m-1}$这个二项式展开式中的$m+1$项的系数.所以，这个商数当然是整数，即$K(K+1)\cdots(K+m-1)$能被$1\cdot2\cdot3\cdots(m-1)m$整除而无余数.

在讨论第一个问题之前，先向读者介绍法国一名女数学家苏非·日尔明所得到的一个定理.

形如n^4+4（其中$n>1$）的任何数是一个复合数.

证明这个定理是轻而易举的.

$$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2$$

$$= (n^2+2-2n)(n^2+2+2n)$$
$$= [(n+1)^2+1][(n+1)^2-1].$$

当n为整数时，上式右端两个因式都是整数，并且当$n>1$时，其中任何一个式子都不等于1，只有当$n=1$时，$n^4+4=5$才是质数.所以，对任何$n>1$的自然数n^4+4都是复合数.

在寻找质数公式的过程中，人们就是这样按照数的表达形式和它的结构，来判定这个数是质数还是复合数.

1640年费尔马回答了第一个问题.他证明了被后人称之为费尔马小定理的定理.这个定理成了“数论”的基本定理之一.

费尔马就是从不论m为什么样的整数，二项式m^2-m能被2整除；而m^3-m能被3整除；m^5-m能被5整除等等讨论的基础上得到了下面这个定理：

“不管m是什么整数，只要p是(任意的)质数，m^p-m就能被p整除.”

不过费尔马不是这样叙述的.容易看到

$$m^p-m=m(m^{p-1}-1).$$

当m是p的倍数时，则这个定理就很显然成立了.如果m不能被p整除，在m与p互质时，差数$m^{p-1}-1$应该被p整除.而费尔马本人就是这样来叙述这个定理的：

“如果p是质数，而m不能被p整除，那么$m^{p-1}-1$能被p整除.”

在没证明这个定理之前，我们用具体的数验证一下：

设$m=2$，当$p=3$时，则$2^{3-1}-1=3$，这说明$2^{3-1}-1$能被3整除.

当$p=5$时，则$2^{5-1}-1=15$.这说明$2^{5-1}-1$能被5整除.

当$p=7$时，则$2^{7-1}-1=63$.这说明$2^{7-1}-1$能被7整除.

再取$p=11$，13，…，只要是质数，定理都成立.但是取$p=9$，$2^{9-1}-1=255$它就不是9的倍数.所以定理中P为质数是一个重要条件.下面我们给出这个定理的证明：

证法1：若m能被p整除，定理显然成立.假设m不能被p整除，则整数m，$2m$，$3m$，…$(p-1)m$，都不能被p整除，并且被p除时余数亦皆不相同（若Km与lm当$p-1\geqslant K>l$时m被p除得相同的余数，则其差

$$Km-lm=(K-l)m$$

即可被p整除，但此为不可能，因p为质数，m不为P的倍数，且$K-l$小于p）.但因被p除其余数最多可为1，2，3，…$p-1$之$p-1$个数，故

$$m=q_1p+a_1$$

$$2m=q_2p+a_2$$

$$3m=q_3p+a_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$(p-1)m=q_{p-1}p+a_{p-1},$$

其a_1，a_2，a_3，…a_{p-1}为数1，2，…，$p-1$之一重新排列.将上述各等式全部连乘起来得

$$[1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(p-1)m^{p-1}]=(q_1p+a_1)(q_2p+a_2)\cdots(q_{p-1}p+a_{p-1}).$$

右端各二项式之乘积展开为

$$Qp^{p-1}+Sp^{p-2}+\cdots+p+a_1\cdot a_2\cdots a_{p-1}.$$

其中Q、S、…均为$q_1q_2\cdots q_{p-1}$的乘积之和.而

$$Qp^{p-1}+Sp^{p-2}+\cdots+p$$

每项都是P的倍数，所以整个式子也是P的倍数，不妨设为

$$Qp^{p-1}+Sp^{p-2}+\cdots+p=Np.$$

则原式可表示为

$$[1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)m^{p-1}]=Np+a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{p-1}.$$

又$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{p-1}=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots(p-1)$，所以

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(p-1)(m^{p-1}-1)=Np.$$

故$m^{p-1}-1$可被P整除.亦即m^p-m可被P整除.

证法2：我们用数学归纳法也容易给出这个定理的证明.

当$m=1$时，$m^p-1=1-1=0$问题成立.

设m为任意整数，$m^{p-1}-1$能被p整除.我们来证明$(m+1)^p-(m+1)$能被p整除.由二项式定理可知

$$(m+1)^p-(m+1)=m^p+Pm^{p-1}+C_p^2m^{p-2}+C_p^3m^{p-3}+\cdots+$$

$$pm+1-m-1=(m^p-m)+pm^{p-1}+C_p^2m^{p-2}+\cdots+$$

$$C_p^{p-2}m^2+pm.$$

但所有的二项式系数

$$C_p^k=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

都可以被质数P整除，而C_p^k又是一整数，且其分子部分都含有因数p，而分母部分却不含有因数p，又因为m^p-m能被p整除，所以$(m+1)^p-(m+1)$也能被p整除.

费尔马在证明了这个定理之后，高兴异常地说："我犹如浸浴在阳光中."他所以高兴是因为这个定理在"数论"的研究中,确实有着重大的意义.难怪人们把这个定理称之为费尔马小定理.

我们在前两节和这一节中，讲述了有关"数论"中的一些历史著名难题.那么，"数论"倒底是一种什么样的科学呢？它的研究方法和研究的对象又是什么呢？有必要向读者作简单的介绍.

"数论"就是研究数的科学.而且所说的数都是整数.在广泛的意义上说来，是研究利用整数按一定形式构成的数系的科学.

"数论"的基本问题之一，是研究一个数能否被另一个数整除的问题，这就是所谓可除性理论."数论"中的许多新概念、新理论、新方法，不仅在数论中有意义，而且在别的数学分支以及其他科学领域中也有着重要的应用.如"自然数列是无穷的"这一概念对数学的全部发展,有着巨大的影响.它反映出物质世界在空间和时间上是无限的客观规律.

"数论"从研究方法上考虑可分为四个部分：即初等数论、解析数论、代数数论和几何数论.

初等数论是不求助于其他数学分支而研究整数的性质.例如已知欧拉恒等式

$$\begin{aligned}&(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)\ (b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)\\&=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)^2+(a_1b_2-a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2+\\&\quad(a_1b_3-a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)^2+(a_1b_4-a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)^2\end{aligned}$$

可以顺利地证明，对每一个整数$Q>0$都可分解为四个整数

平方的和，即

$$Q = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$$

其中x，y，z，u均为整数.当然这个问题要理解为找不定方程的整数解.

所谓解析数论是用微积分的工具来解决“数论”问题.

代数数论是研究代数数的概念.所谓代数数就是方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的根.其中a_0，a_1，$\cdots a_n$是整数.

几何数论研究的基本对象是“空间格网”，也就是研究坐标系中坐标都是整数的点组的数目、对称性和相关的一些性质.这个问题对几何学和结晶学有着重大的意义.

十 费尔马大定理给人们的疑团

要知道费尔马大定理，得先说说勾股定理.

早在纪元前1120年，我国古代数学家商高就得到了“勾三股四弦五”的结果. 我国古算书《周髀算经》一开头便提到了“勾广三，股参四，经隅五”. 赵爽在该书的注解中还说：“禹治洪水，决流江河，望山川之形，定高下之势，除滔天之灾，释昏垫（百姓）之厄，使东注于海而无浸逆（溺），乃勾股之所由生也.” 这本书后半部分讲解《盖天》说中，可以看到“勾股定理”的一般形式：“勾、股各自乘，并而开方除之，得（弦）”，即

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

这个定理当今被广泛地应用着，不仅初等数学，就是高等数学中的一些计算题和推理论证一些定理时，也经常要用到. 这个定理在工农业生产实践中的应用就更广泛了.

勾股定理的发现是我国古代数学方面的辉煌成就之一.

传说古希腊的数学家毕达哥拉斯公元前六世纪时，才证明了这个定理，当时还杀了一百头牛表示庆贺. 从此，外国都把这个定理叫做毕达哥拉斯定理. 当然，这是不对的. 毕达哥拉斯获得这个定理的证明，比商高最少也要迟五百多年. 所以，这个定理在我国称之为商高定理，或称勾股定理. 现在我们把它叙述如下：

勾股定理：在任意一个直角三角形中，若以 x、y 表示

二直角边，z表示斜边，则有

$$x^2+y^2=z^2 \qquad (1)$$

从代数的观点来看，(1) 式是一个不定方程．而$x=3$，$y=4$，$z=5$是方程(1)的一组整数解．

古希腊亚历山大里亚城的数学家刁番都(210—290年)在他的一本《算术学》的著作中，研究了这样一个问题：从“两个整数的平方和，等于另一个整数的平方”这一点来说，具有这种性质的整数是否只有3和4？答案是否定的．他证明了具有这种性质的整数有无穷多组，并且给出了求这些整数的一般法则：找两个整数a和b，使$2ab$为完全平方．这时(1)式中$x=a+\sqrt{2ab}$，$y=b+\sqrt{2ab}$，$z=a+b+\sqrt{2ab}$．

利用这种方法，我们可以求得一些整数组满足(1)式．如$3^2+4^2=5^2$，$5^2+12^2=13^2$，$6^2+8^2=10^2$，$7^2+24^2=25^2$，$8^2+15^2=17^2$，$9^2+12^2=15^2$，$9^2+40^2=41^2$等．

人们也把满足不定方程$x^2+y^2=z^2$的所有正整数解x、y、z叫做毕达哥拉斯数．并且，发现了毕达哥拉斯数的基本性质和求毕氏数组的公式．

性质1：设a_1、b、c_1是一组毕达哥拉斯数，则ka_1、kb_1、kc_1（k是任意正整数）也是毕氏数组．

事实上，由$a_1{}^2+b_1{}^2=c_1{}^2$可得

$$(ka_1)^2+(kb_1)^2=(kc_1)^2.$$

这个性质告诉我们，只要知道一组毕氏数，便可得到无穷多组毕氏数．但不能由此得到全部毕氏数组．

性质2：若毕氏数a、b、c中任意两个数都是互质的，

则称为互质的毕氏数组．在毕氏数组 a、b、c中，若有两个数互质，则a、b、c必为互质的毕氏数组．

证明：用反证法易证．设毕氏数组a、b、c中a与b互质，而a、c不互质．则有 $a=ka_1$ $c=kc_1$，其中 k 为 a、c之最大公约数，且$k\neq 1$．代入$a^2+b^2=c^2$可得

$$(ka_1)^2+b^2=(kc_1)^2$$

$$\therefore\quad b^2=k^2c_1{}^2-k^2a_1{}^2=k^2(c_1{}^2-a_1{}^2)$$

$\therefore$ b 含有因数K，即 a、b不是互质的，与假设矛盾．所以，a、c必互质．同理可证b、c 亦互质，即a、b、c 为互质的毕氏数组．

性质 3：互质毕氏数组中的 a、b、c 不可能同时为偶数或奇数．

a、b、c不能同时为偶数是显而易见的．

若a、b、c同时为奇数，即设$a=2k+1$，$b=2n+1$，（k、n都是正整数）代入$a^2+b^2=c^2$得

$$(2k+1)^2+(2n+1)^2=c^2,$$

$$\therefore\quad c^2=4(k^2+n^2+k+n)+2. \qquad (*)$$

由此可知c^2为偶数，则c必为偶数，故c^2必可被 4 整除．但从（*）等式知c^2被 4 除余 2，矛盾．故a、b、c 不能同时为奇数．

除了得到上述三个性质外，还可推出求毕氏数组的公式．

由性质 3 知毕氏数组a、b、c不可能同时为偶数或奇数．所以，不妨设a为奇数，b 为偶数，则 c 必为奇数．方程 $a^2+b^2=c^2$，可变为$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$

令 $c+b=p$ $c-b=q$．则 $c=\dfrac{p+q}{2}$，$b=\dfrac{p-q}{2}$，

$a^2 = pq$.（$p>q$）

∵ a为奇数，$a^2 = pq$，∴ p、q必为奇数．现在再证p、q必为互质数．

假设p、q不互质，其最大公约数设为k，$k \neq 1$，则

$$p = kp_1, \quad q = kq_1$$

从而

$$c = \frac{p+q}{2} = \frac{p_1+q_1}{2}k,$$

$$b = \frac{p-q}{2} = \frac{p_1-q_1}{2}k,$$

故b、c不互质．但这是不可能的．所以p、q必互质．

设 $p = u^2$，$q = v^2$．其中u，v互质，且$u>v$．故有

$$a = uv, \quad b = \frac{u^2-v^2}{2}, \quad c = \frac{u^2+v^2}{2}.$$

这就是求毕氏数组的公式．利用这个公式可以求得一些互质的毕氏数组：

u	v	a	b	c
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65

后来，在17世纪初期，人们又开始寻找不定方程

$$x^3+y^3=z^3 \tag{2}$$

和

$$x^4+y^4=z^4 \tag{3}$$

的整数解．但是，作了许多尝试都未能成功．这时数学家费尔马在巴黎买了一本刁番都所著《算术学》的法译本．他读这本书时，在书上空白处写了一段话：

“$x^2+y^2=z^2$有无穷多组整数解，而形如

$$x^n+y^n=z^n \tag{4}$$

的方程，当 n 大于 2 时，永远没有整数解．”

费尔马有这样一种习惯：自己的读书心得，以及发现的定理或证明，就随便地写在书页的边」．关于方程(4) 无整数解的结论，也是他死后，他的儿子在《算术学》这本书上发现的，而且还发现费尔马这样写到：‘任何整数的立方，不能分成两个整数的立方和；任何整数的四次方不能分成两个整数的四次方之和；或者一般地，任意整数的 n 次方，除平方外，都不能分成二个整数的 n 次方之和．我想出了一个绝妙的证明方法，但是，这页边太窄，不容我将证明写出来．”由这段话可见，费尔马对于方程(2)、(3)、(4) 无整数解，得到了数学的证明，遗憾的是他没有把证明写出来便去世了．

这个结论，从经验上来看似乎是不难证明的．．可是，当费尔马的儿子将此结论发表之后，世界上各国最著名的数学家们，都想尝试重新给出它的证明方法．出乎人们的意料之外，时至今日都没有成功．在数学史上成了一个非常著名的

难题．后来，人们都称这个定理为“费尔马大定理”．

在科学研究上的失败，从来就不会是徒劳的．正是由于许多数学家前仆后继，不畏劳苦地寻求这个结论的证明，而大大地推动了数学的发展．不少人正是由于进行了这些研究工作，而在“数论”方面得出新的理论和种种新的数学方法．

由于费尔马未能将该定理的证明写出来，可苦了后继人．就是善于计算，并且攻克了不少极端困难的难题的欧拉和阿贝尔，也只不过证明了方程(4)的特例，即方程(2)和(3)无整数解．十九世纪德国著名数学家狄里克莱(1805—1859年)证明了$x^5+y^5=z^5$无整数解．后来又有人证明了对于$n\leqslant 3000$的某些数，该定理的正确性．但是，对于n的一切值，既没有证明结论是正确的，也没有找到反例来否定这个定理．

1914年第一次世界大战前夕，德国科学院曾悬赏1万马克，征求这个难题的解答．之后，每年都收到大量不正确的解答．有时也收到著名数学家的错误证明的稿件．法国科学院也发表声明，对于证出这个难题的人要授予一笔可观的奖金．结果，依然还是大失所望．

长期以来，费尔马给人们的疑团，没能得到解决．迫使人们越来越认为：或者费尔马根本就没有进行证明；或者他在证明过程中，有什么地方搞错了．这个定理也可能是错误的．但是，要想否定这个一般结论，只要找到一个反例就行．即证实确有两个整数的某一次幂（大于二次幂）的和等于另一个整数的同一次幂就行．不过这个幂次一定要在大于等于100000的数目中去找，（因为，现在已经证明了$2<n<$

100000的一切数，费尔马大定理是正确的）．这样，要想从否定方面解决这个问题，难度也是非常大的．

十一　当代著名的数学难题
——希尔伯特问题

我们这些生长在二十世纪的人，对于二十世纪以前世界上所提出的一些著名数学难题，以及为解决这些数学难题做出巨大贡献的著名数学家，应该有所了解；而对于本世纪的著名数学难题，以及由于提出和解决这些难题而闻名于世的数学家们，则更应该了解．所以，在这本小册子里，向读者介绍几个二十世纪数学难题的故事．从这些故事中，可以看到：旧的数学难题还没有解决，新的难题又源源不断地提出来．然而，正是由于对这些难题的研究和解决，才不断地产生许多新的数学方法、新的数学分支，逐步地丰富数学知识的宝库，使数学获得巨大的生命力，不断向着新的高度挺进．同时，也造就出许多优秀的数学家．

一次轰动世界的讲演

二十世纪的头一年，在巴黎召开的国际数学家会议上，一位德国年仅38岁的数学家、德国哥廷根大学数学教授希尔伯特，发表了一次轰动世界的演说．他指出：跨进二十世纪的数学，将沿着他所发表的23个问题的方向发展．当时有的人佩服这位青年数学家的胆略，赞扬他能站在数学发展的最

前沿，大胆地进行预测，敏锐地作出科学判断．然而，也有人在一边冷眼旁观，感到这位年轻人是在说大话吹牛皮，怀疑二十世纪数学的发展趋势能否被他提的23个问题所左右．

历史是最好的见证．至少二十世纪上半叶，全世界的数学家们被这23个难题所吸引着，为了解决这些问题做了大量的研究工作，使许多数学新分支，特别是边 缘 学 科 相继诞生．可以毫不夸张地说，这23个难题成了整个数学界研究的中心课题．半个多世纪以来，能解决希尔伯特难题，已成为当代数学家的无上荣誉．1976年美国数学家评选的自1940年以来，美国数学十大成就中，有三项是希尔伯特难题中的第一、第五、第十问题的解决．

1975年在美国的伊利诺斯大学，召开了一次国际数学会议．数学家们回顾四分之三世纪以来，对希尔伯特的23个难题的研究，约有一半以上已经解决了．其余一少半，也都有了重大的进展．并且，这23个难题至今仍是数学家们非常注意的中心之一．

一个数学家在一次讲演中提出的问题，能对数学的发展产生如此久远而深刻的影响，这在数学史上是独一无二的，在人类文明的发展史上也是极为罕见的．因此，希尔伯特被称为二十世纪数学发展的代表人物．

希尔伯特童年就跟着母亲学习数学，这对他成长为学识渊博的数学家影响极大．他毕业于 东 普 鲁 士的寇尼斯堡大学，早期研究代数不变式论、代数数论、几何基础，后来又研究变分法、积分方程、函数空间和数学物理方法等．1885年，二十三岁的希尔伯特就获得了博士学位．1895年，他在

德国最著名的科学教育中心哥廷根大学任数学教授.1899年，他出版了“几何基础”一书，把欧几里德几何学整理为从公理出发的纯粹演绎系统，并把注意力转移到公理系统的逻辑结构．正如本书第四节所介绍的，希尔伯特成功地建立起公理化体系．因而希尔伯特的《几何基础》一书也是近代公理化思想的代表作．他晚年致力于数学基础问题的研究，是数学基础中形式主义学派的代表人物．

希尔伯特在那次演讲中提出的23个难题，后来统称为希尔伯特问题．希尔伯特问题涉及数学知识的范围非常之广，理论也特别深，并且大多数是关于高等数学中的题目．这里只向读者介绍几个浅显的并与本书前几节有关的题目．

合理不合理，都是相对的

为了介绍希尔伯特第一难题，首先打个比喻：假设在我们面前放有“无限多个”装有水果的篮子，要从每个篮子里取出一个水果，放在一个空篮子里．如果装有水果的篮子是有限个，这个问题是显而易见的．由于装有水果的篮子是无限多个，于是就产生了这样做是否允许的问题.在数学上，这个问题的抽象提法称为“选择公理”.

希尔伯特第一难题叫做“连续统假设”，意思是相当于问：从无限多个篮子里各选一个水果的选择公理，在数学上是否合理？1939年奥地利数学家哥德尔证明：用通常的集合论公理，不可能推出选择公理是对的．1963年美国数学家柯恩又从另一方面证明：用通常的集合论公理，不可能推出选

择公理是错的.这样，就产生了两种针锋相对的结论.并且，在承认推出“选择公理”是对的基础上，建立起一套数学理论；在不承认推出“选择公理”是对的前提下，也相应地创立一套数学理论.同时，令人惊奇的是两套数学理论都对，都各自成体系，都能自圆其说，无懈可击.这犹如第四节介绍的欧氏几何、罗氏几何、黎曼几何三种几何学都对一样，只不过是相对于某一个范围内应用哪一种理论更为精细确切而已.有关这方面的研究，随着时间的推移，越来越深入.

希尔伯特难题不一定全是对的

科学的问题来不得半点虚假，预测的东西不一定全对.尽管一个人才华横溢，也有局限性，所提出的问题，不见得都是百分之百的正确.希尔伯特是目光锐利、智慧超群的数学家，已被举世公认.可是他提出的第二个难题，业经证明是错误的.不过否定这个难题，却是经过了极端艰难的过程.

这个难题是关于数学基础方面的内容.在数学研究中，越是基本的理论，越难于证明，这是众所公认的.这类问题象人类思维史上的一座座高山峻岭，只有那些具备惊人的数学才能和在崎岖小路的攀登上不畏劳苦的人，才有希望到达险峻的顶峰.

人们常常是把经过千百万次实践验证，又是最根本的若干命题作为公理.欧氏几何中的定义、公设或者公理都是人

们经验的总结，是建立在直观基础上的一种抽象的具有“自明性”的命题.在数学中，以较复杂的概念、公理做为基础，来推出其它的定理或命题，这种整理和叙述数学知识的方法，叫做公理化方法.它是数学论证方法中最常用的一种.人们不禁要问：是不是任何科学都能用同一套公理、定义做基础呢？用一套公理能否推出数学里的所有定理呢？

希尔伯特的第二难题就是算术公理的无矛盾性．他希望借此证明：所有的数学定理都能由一组公理推出来．这种想法很好，它会使人易于掌握，同时，越是抽象的理论，应用起来越是广泛.然而，这种想法是办不到的.严格的科学，特别是非常精确的数学，不能凭想象决定对错，没有严格的数学论证是不能下定论的．可是，这个难题的证明，难度之大是难以想象的．二十世纪过了30多年，无论是肯定或者否定这个难题的文章都没有问世，甚至说毫无进展．直到1931年奥地利数学家哥德尔打破了希尔伯特的这一幻想，成功地证明了：任何一个公理化系统中，必定有一个命题不能由这组公理推出其正确与否．不少人看到了世界上第一个人否定了希尔伯特第二难题的证明，惊得目瞪口呆．因而，哥德尔的这一成就轰动了整个数学界，在数学的发展史上留下了重要的一页.

由希尔伯特猜想引起的问题

希尔伯特的23个难题中，有一些是关于数论方面的问题.如关于素数和方程的正整数解的问题.还包括实数中有关

代数数和超越数的一个猜想.

满足整系数代数方程的数叫做“代数数”，如方程

$$x^2-4x-3=0$$

的根 $x_{1,2}=2\pm\sqrt{7}$，就是两个代数数. 反之，不满足整系数代数方程的数,称为超越数,如π、e等都是超越数.

希尔伯特的第七个问题猜想：若α是非0非1的代数数，β是无理数和代数数，那么α^β一定是超越数.

这个关于代数数和超越数的猜想，看起来远远要比哥德巴赫猜想容易解决. 然而,也是30多年过去了,尽管世界上有相当多的人在研究这个猜想的解法,还是没有人能给出证明.

1934年，28岁的苏联青年数学家盖尔冯特终于给出了严格的数学证明，证明了希尔伯特的这个猜想是正确的.

希尔伯特第七问题虽然解决了，但是由此又引出了新的数学难题，即若α和β都是超越数，那么，α^β是否一定是超越数呢？e^e、e^π、π^e、π^π是否都是超越数呢？这个难题在希尔伯特第七猜想得证的基础上，似乎不难，然而，至今只有e^π是超越数被证明，其它几个是不是超越数，至今没有解决. 要想证明这些数是超越数，必须证明它们都不是整系数代数方程的根.而突破这一步并非轻而易举.经过40多年的漫长岁月，不知有多少大胆的探险者，为解决这个问题而苦思冥想，至今不见分晓.

中华民族的骄傲

希尔伯特问题发表以来，全世界的数学家们都在进行研

究，中国的数学家们也不例外．

希尔伯特第十六难题是关于微分方程极限环的性质．1955年苏联科学院院士彼得洛夫斯基发表文章指出：二次代数系统构成的微分方程组（简称为E_2），其极限环至多只能有三个，并宣布解决了希尔伯特的这个难题．后来有人发表文章指出他证明中的错误，同时怀疑他提出的结论的正确性．1976年彼得洛夫斯基又发表文章，承认他证明有错误，但认为结论还是正确的．

彼得洛夫斯基在世界上是很有名望的数学大师，特别是对于微分方程理论的研究，做过很大的贡献．因而，他对希尔伯特第十六难题的看法，统治了数学界达25年之久．

1979年彼得洛夫斯基的结论，被一位中国不出名的研究生推翻了．中国科技大学的数学研究生史松龄举出了E_2至少出现四个极限环的例子，否定了彼得洛夫斯基关于E_2至多只有三个极限环的论断，使得关于希尔伯特第十六难题的研究，经过25年后首次取得重大的进展．这是一个很了不起的研究成果，为中华民族赢得了荣誉．

现在，还有许许多多的数学难题在向人们招手．相信，我国广大的青少年数学爱好者，会学习前人不畏艰难险阻，勇于攀登高峰的精神，刻苦学习，打好基础，坚韧不拔，不辞劳苦，为数学学科的发展，为现代科学的繁荣，做出不可磨灭的贡献．